

Mathematik-Brückenkurs

Übung 10

Musterlösung

1. Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x) = x^2 - 12x + 4$.

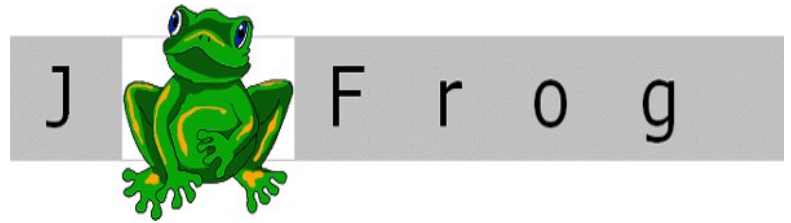
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 12 = 0 \\ \Rightarrow x &= 6 \\ f''(x) &= 2 \\ \Rightarrow f''(6) &= 2 > 0 \Rightarrow \text{Min. bei } (6, 36 - 72 + 4) = (6, -32) \end{aligned}$$

2. Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x) = x^3 - 12x + 2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 = 0 \\ \Rightarrow x^2 - 4 &= 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2 \\ f''(x) &= 6x \\ \Rightarrow 6 \cdot 2 &= 12 > 0 \Rightarrow \text{Min. bei } (2, 8 - 24 + 2) = (2, -14), \\ \Rightarrow 6 \cdot (-2) &= -12 < 0 \Rightarrow \text{Max. bei } (-2, -8 + 24 + 2) = (-2, 18) \end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x) = x^2 \cdot e^x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + 2x)e^x = 0 \\ \Rightarrow x(x+2) &= 0 \Rightarrow x = 0, x = -2 \\ f''(x) &= (x^2 + 2x)e^x + (2x + 2)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x \\ \Rightarrow f''(0) &= 2 > 0 \Rightarrow \text{Min. bei } (0, 0), \\ f''(-2) &= (4 - 8 + 2)e^{(-2)} = -2e^{-2} < 0 \Rightarrow \text{Max. bei } (-2, 4e^{(-2)}) \end{aligned}$$



4. Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x) = x \cdot e^{2x}$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = (2x+1)e^{2x} = 0 \\
 \Rightarrow x &= -\frac{1}{2} \\
 f''(x) &= 2e^{2x} + (2x+1) \cdot 2e^{2x} = (4x+4)e^{2x} \\
 f''\left(-\frac{1}{2}\right) &= (-2+4)e^{-1} = 2e^{-1} > 0 \\
 \Rightarrow \text{Min. bei} &\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-1}\right)
 \end{aligned}$$

5. Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$, $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \pi \cdot \cos(\pi \cdot x) = 0 \Rightarrow \cos(\pi \cdot x) = 0 \\
 \Rightarrow \pi \cdot x &= \frac{\pi}{2} \vee \pi \cdot x = \frac{3}{2} \cdot \pi \\
 \Rightarrow x &= \frac{1}{2} \vee x = \frac{3}{2} \\
 \text{da } x &\text{ beschränkt ist auf } [0, 1], \text{ müssen wir } \frac{3}{2} \text{ nicht untersuchen} \\
 f''(x) &= -\pi^2 \sin(\pi \cdot x) \Rightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) = -\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi^2 < 0 \\
 \text{Max. bei} &\left(\frac{1}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)
 \end{aligned}$$

6. Bestimmen Sie die Wendepunkte von $(x^2+1) \cdot e^x$

Wir bestimmen die lokalen Extremwerte von $f'(x) = (x^2+1)e^x + 2xe^x = (x^2+2x+1)e^x$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= (2x+2)e^x + (x^2+2x+1)e^x = (x^2+4x+3)e^x = 0 \Rightarrow x^2+4x+3=0 \\
 x_1 &= -1, x_2 = -3 \\
 f'''(x) &= (2x+4)e^x + (x^2+4x+3)e^x = (x^2+6x+7)e^x \\
 f'''(-1) &= (1-6+7)e^{-1} = 2e^{-1} \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } (-1, 2e^{-1}) \\
 f'''(-3) &= (9-18-7)e^{-3} = -16e^{-3} \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } (-3, 10e^{-3})
 \end{aligned}$$