Dipl. Math. Thomas Oberländer

Mathematik-Brückenkurs
Übung 10
Musterlösung

1. Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x)=x^2-12x+4$.

$$\begin{aligned}
&f'(x)=2x-12=0\\
&\Rightarrow \quad x=6\\
&f''(x)=2\\
&\Rightarrow \quad f''(6)=2>0 \quad \Rightarrow \quad \text{Min. bei } (6,36-72+4)=(6,-32)
\end{aligned}$$

2. Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x)=x^3-12x+2$.

$$\begin{aligned}
&f'(x)=3x^2-12=0\\
&\Rightarrow \quad x^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=2, x_2=-2\\
&f''(x)=6x\\
&\Rightarrow \quad 6\cdot 2=12>0 \Rightarrow \text{ Min. bei } (2,8-24+2)=(2,-14),\\
&6\cdot(-2)=-12<0 \Rightarrow \text{ Max. bei } (-2,-8+24+2)=(-2,18)
\end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x)=x^2\cdot e^x$

$$\begin{aligned}
&f'(x)=(x^2+2x)e^x=0\\
&\Rightarrow \quad x(x+2)=0 \Rightarrow x=0, x=-2\\
&f''(x)=(x^2+2x)e^x+(2x+2)e^x=(x^2+4x+2)e^x\\
&\Rightarrow f''(0)=2>0 \Rightarrow \text{ Min. bei } (0,0),\\
&f''(-2)=(4-8+2)e^{(-2)}=-2e^{-2}<0 \Rightarrow \text{ Max. bei } (-2,4e^{(-2)})
\end{aligned}$$

4. Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x)=x\cdot e^{2x}$

$$f'(x)=e^{2x}+x\,2\,e^{2x}=(2x+1)\,e^{2x}=0$$
$$\Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2}$$
$$f''(x)=2\,e^{2x}+(2x+1)\,2\,e^{2x}=(4x+4)\,e^{2x}$$
$$f''(-\frac{1}{2})=(-2+4)\,e^{-1}=2\,e^{-1}>0$$
$$\Rightarrow \quad Min.\,bei\,(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}e^{-1})$$

5. Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x)=\sin(\pi\cdot x),\quad x\in[0,1]$

$$f'(x)=\pi\cdot\cos(\pi\cdot x)=0\Rightarrow\cos(\pi\cdot x)=0$$
$$\Rightarrow \quad \pi\cdot x=\frac{\pi}{2}\vee\pi\cdot x=\frac{3}{2}\cdot\pi$$
$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\vee x=\frac{3}{2}$$

da x beschränkt ist auf $[0,1]$, müssen wir $\frac{3}{2}$ nicht untersuchen

$$f''(x)=-\pi^2\sin(\pi\cdot x) \quad\Rightarrow\quad f''(\frac{1}{2})=-\pi^2\sin(\frac{\pi}{2})=-\pi^2<0$$
$$Max.\,bei\,(\frac{1}{2},\sin(\frac{\pi}{2}))=(\frac{1}{2},1)$$

6. Bestimmen Sie die Wendepunkte von $(x^2+1)\cdot e^x$

Wir bestimmen die lokalen Extremwerte von $f'(x)=(x^2+1)e^x+2x\,e^x=(x^2+2x+1)e^x$

$$f''(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x+1)\,e^x=(x^2+4x+3)e^x=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+4x+3=0$$
$$x_1=-1,x_2=-3$$
$$f'''(x)=(2x+4)e^x+(x^2+4x+3)e^x=(x^2+6x+7)e^x$$
$$f'''(-1)=(1-6+7)e^{-1}=2\,e^{-1}\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \text{Wendepunkt bei }(-1,2\,e^{-1})$$
$$f'''(-3)=(9-18-7)e-3\text{¿}-16\,e^{-3}\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \text{Wendepunkt bei }(-3,10\,e^{-3})$$