Skript zum Mathematik-Brückenkurs

Inhaltsverzeichnis

1 Warum Mathematik?

1.1 Die Natur und die Mathematik

Das älteste je gefundene Dokument – eine Tontafel, circa 500 Jahre älter als die ältesten Keilschrift-Dokumente und damit circa 5000 Jahre alt – enthält Zahlen und Rechnungen. Es ist eine Steuerquittung. So können wir sagen, dass wirtschaftliche Fragen die „Mutter der Mathematik” waren. Die Notwendigkeit, Bücher zu führen brachte die Menschen dazu, sich intensiv mit Zahlen zu beschäftigen.

Später wurden dann immer mehr Aspekte des Lebens und der Natur in Zahlen ausgedrückt.

So wurde es z.B. möglich, Sonnenfinsternisse mittels mathematischer Methoden vorherzusagen. Und die Priester damals konnten ihre Anhängerschar auf diese Weise beeindrucken und so ihren Arbeitsplatz sichern. [2]

Wenn Sie zum Beispiel etwas über den Klimawandel und Vorhersagen über zukünftige Entwicklungen in diesem Bereich lesen, seien Sie sicher, dass als Grundlage dessein ein Forscher Differentialgleichungen aufgestellt und gelöst hat. Die Differentialgleichungen, die auf der Differential- und Integralrechnung aufbauen, sind die Sprache, mit der heute Probleme der Naturwissenschaften formuliert und behandelt werden. Und ein Aspekt der Mathematik – die Statistik- wird heute in fast jedem wissenschaftlichen Zusammenhang benötigt.

1.2 Ein bißchen Geschichte oder: Was die Mathematik mit dem Pfeffer zu tun hat

Nachdem alles mit ökonomischen Fragen begann, bestimmten auch weiter wirtschaftliche Notwendigkeiten die weitere Entwicklung der Mathematik. Die Ziffern, die wir heute nutzen - $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ - kamen ins Leben, um das Leben der Buchhalter leichter zu machen. Obwohl wir sie die „arabischen“ Ziffern nennen, wurden sie nicht im arabischen Kulturkreis, sondern in Indien erfunden. Die indischen Kaufleute verkauften ihren Pfeffer an arabische Kaufleute, die den Pfeffer als Zwischenhändler nach Europa lieferten. Zu dieser Zeit vor rund 1000 Jahren hatte Venedig ein Monopol auf den Pfefferhandel in Europa.

In diesen alten Zeiten machten die europäischen Kaufleute ihre Berechnungen mit römischen Ziffern. Wir werden in diesem Kurs nicht lernen, wie man zum Beispiel mit römischen Zahlen multipliziert (obwohl das Verfahren für angehende Informatiker sehr interessant ist), aber seien Sie sicher:

Es war viel mehr Arbeit als wir heute mit den „arabischen Ziffern“ haben!

Zu dieser Zeit konnte man in Deutschland bei einem Rechenmeister lernen, wie man Zahlen addiert. Wenn Sie lernen wollten, wie man multipliziert, war es damals eine gute Idee, sich an einer norditalienischen Universität einzuschreiben. Oder Sie fanden einen Rechenmeister in Deutschland, der es Ihnen heimlich erklärte.

Und da die Menschen immer voneinander lernen, lernten die arabischen Rechenmeister von den indischen das neue System und von diesen wiederum übernahmen es die italienischen Rechenmeister.

In der ersten Zeit war dieses Wissen allerdings strengstens geheim. Bis zum frühen 16. Jahrhundert kannte kaum ein europäischer Kaufmann diese neuen, revolutionären Ziffern. Diejenigen, die dieses Wissen besaßen, waren dafür allerdings extrem erfolgreich. So führte der Augsburger Jakob Fugger – genannt Jakob der Reiche – seine Bücher mit arabischen Ziffern und mit der gerade in Italien entwickelten doppelten Buchführung. Er soll gesagt haben „Buchführung ist die Kunst, die reich macht.“, und Sie können sicher sein: Er wusste, wovon er sprach. Er wurde – gemessen am Bruttosozialprodukt Europas – der reichste Mensch, der jemals auf diesem Planeten lebte. Denken Sie daran, wenn Sie die doppelte Buchführung lernen müssen und das fürchterlich langweilig finden.(Es macht natürlich einen Riesen-Unterschied, ob Sie sich mit anderer Leute Zahlen beschäftigen oder mit den eigenen, die den Unterschied machen, ob Sie selbst reich werden oder nicht.

Zusammen mit dem Pfeffer reisten diese neuen Ziffern, die so bedeutsam für uns wurden, nach Europa und übernahmen von hier aus die ganze Welt.[2]

1.3 Auf den Kopf kommt es an – Mathematik machen wir mit dem Gehirn

Mathematik ist lange so gelehrt und gelernt worden, als ob sie in einem „geistigen Raum“ - unabhängig von den Bedingungen, die unser Körper, speziell unser Gehirn, uns setzt, stattfände. Kein Wunder, dass dabei viele Schüler „aus dem Rennen ausstiegen“. Und ich glaube, jeder hat zumindest in seinem Bekanntenkreis jemanden, der voller Stolz sagt, dass er „überhaupt keine Mathematik kann“. Die Hinrforscher können uns heute sagen, wie es dazu kommt, was im Hirn passiert, wenn jemand zum Urteil über sich selbst kommt, für Mathematik einfach nicht geeignet zu sein. Und daher tut es recht gut, wenn man sich mit der Mathematik beschäftigt, auch ein wenig zu lesen und zu hören, was die moderne Hirnforschung dazu zu sagen hat. Daher folgen in diesem Skript nun einige Worte dazu.

1.3.1 Fehler – sind sie wirklich so übel?

Was ist das erste, dass Ihnen zu dem Wort „Fehler“ einfällt? Wenn Ihre ersten

Assoziationen negativ sind – etwa "Fehler sind schlecht" or "Vermeiden" oder „bei der Prüfung durchgefallen“, sind Sie in guter Gesellschaft mit den meisten Menschen, die eine Schule besucht haben. Die meisten Menschen denken, dass Fehler eine richtig üble Sache sind. Das mag in manchen Bereichen ja auch stimmen – ich denke da an Chirurgen oder Piloten – aber:

Wir lernen aus unseren Fehlern

ist ebenso wahr. Und gerade in Mathematik ist es so: Wenn Sie darauf geprägt sind, Fehler unbedingt zu vermeiden, dann sind Ihre Voraussetzungen dafür, neue mathematische Fähigkeiten zu entwickeln, ganz schlecht. Ich schlage Ihnen daher einen etwas anderen Umgang mit Fehlern in der Mathematik vor: Die meiste Zeit sind Fehler, die sie mathematisch machen, nämlich richtig super: Sie sind, so glaube ich, sogar die einzige Möglichkeit, die Sie haben, um richtig gut in Mathematik zu werden. Manchmal sind die Fehler aber auch nicht so toll. An der Universität ist es so:

- 6 Monate lang sind Fehler eine wunderbare Sache, weil Sie daraus lernen
- 2 Stunden lang sind sie übel – in Ihrer Prüfung

Die Schule hat in unseren Gehirnen diese vertrackte Verbindung von „Fehler“ und „schlecht“ geschaffen. So sind wir darauf, geprägt, Fehler vermeiden zu wollen und tun lieber nichts. Erinnern Sie sich, als der Lehrer aufgefordert hat, es solle jemand etwas vorrechnen und Sie auf den Boden geschaut haben, um bloß nicht „dranzukommen“? Dabei wäre das doch der ideale Moment gewesen, es zu lernen! Irgendwann geht der Mitschüler, der es perfekt kann, an die Tafel und rechnet vor. Merken Sie es? Der hat in dem Moment gar nichts dazugelernt, er konnte es ja schon!

Daher empfehle ich Ihnen:

- **Machen Sie in den nächsten Monaten möglichst viele Fehler!**
- **Holen Sie sich soviel Feedback zu Ihrem mathematischen Tun wie irgend möglich**

Mathematik lernen ist wie Laufen oder Fahrradfahren lernen. Sie können es nicht allein dadurch lernen, dass Sie denen zuhören, die es schon können.

1.3.2 Bedeutung – Voraussetzung zum Lernen

Haben Sie je etwas gelernt und es sofort wieder vergessen? Oft sind wir wütend auf uns selbst, wenn das passiert, aber das ist eine ganz wichtige Funktion unseres Gehirns. **Das Gehirn merkt sich Dinge dann nicht, wenn sie bedeutungslos sind.** Zum Beispiel wissen Sie vermutlich nicht mehr, welche Werbung auf dem letzten Bus stand, den Sie gesehen haben.

Woran merkt nun das Gehirn, was Bedeutung hat? Es sind die Emotionen. Es ist kein Problem, sich Dinge zu merken, die mit Emotionen verknüpft sind. Aber es ist sehr schwierig, sich Dinge zu merken, die das nicht sind. Das gilt auch für die Mathematik: Wenn Sie sich die mathematischen Inhalte merken wollen, dann machen Sie sich klar, welche Bedeutung sie für Sie haben. Welche Möglichkeiten gibt es da, wenn es um Mathematik geht?

- Ein erstrebenswertes Ziel (vielleicht Ihr Bachelor-Abschluss?)
- die Verbindung zu einem Ihnen wichtigen Menschen (Kinder lernen viel von ihren Eltern....)
- die Liebe zum Thema (vielleicht macht Ihnen Mathematik ja auch Spaß!)
- .... vielleicht fällt Ihnen Ihre persönliche Bedeutung, die die Mathematik für Sie hat, ein: Schreiben Sie sie auf!

Wenn Sie an dem Thema interessiert sind, empfehle ich Ihnen die Vorträge und Bücher von Gerald Hüther auf youtube zu dem Thema.

1.3.3 Was, wenn wir Ideen brauchen?

Lassen Sie uns ein kleines Gehirn-Experiment machen: Wenn ich Sie auffordere „Bitte stellen Sie sich keine weiße Maus vor. Sie darf auch keinesfalls auf einem roten Fahrrad sitzen und sie sollte schon gar keine blaue Trompete spielen!“ Was passiert da in Ihrem Gehirn?

Meine Aufforderung war, all dies aus Ihrem Gehirn herauszuhalten. Und genau in diesem Moment kamen all diese Inhalte in Ihr Gehirn. Warum?

Die Antwort liegt in der Struktur des Gehirns. Da gibt es eine Region des Gehirns, die die Sätze analysiert – sie behandelt dabei solche Worte wie „kein, nicht...“ und die anderen logischen Terme. Aber in dieser Region gibt es kein Vorstellungsvermögen, egal, ob der Satz ein „kein“ enthält oder nicht. Und dann gibt es eine andere Region, in der die Vorstellungen entstehen. Und diese Region hat nichts zu tun mit all den logischen Begriffen. So kann unser Gehirn die Aufgabe, sich „etwas nicht vorzustellen“ gar nicht erfüllen.

Was hat dieser „Weiße-Maus-Effekt“ nun mit Mathematik zu tun?

In der Schule waren die meisten gestellten Aufgaben so, dass Sie sie lösen konnten, ohne Ihr Vorstellungsvermögen überhaupt einzusetzen. Wenn ich Sie beispielsweise auffordere „Addieren Sie 7 zu 6 mal 4“, dann kommen Sie auf die 31, ohne Ihr Vorstellungsvermögen belästigen zu müssen. Aber wenn ich Sie bitte „Addieren Sie 6 zu einem Vielfachen von 4“, dann geht das nicht mehr so einfach. Bei der zweiten Aufgabe haben Sie eine Freiheit der Wahl. Und diese Freiheit der Wahl hat ihren Preis: Mehr Regionen Ihres Gehirns sind dabei involviert. Die eine Region fragt die andere „Sag mir bitte irgendeine Zahl!, damit sie die Zahl dann mit 4 multiplizieren kann. Was ist, wenn diese Region gerade, damit das Gehirn Energie spart, im Tiefschlaf ist, weil wir in einer Mathestunde sind und gerade diese Region die ganzen letzten Jahre in Mathestunden nie gebraucht wurde?

Das ist ein wichtiger Unterschied zwischen Schul- und Universitäts-Mathematik. Wir brauchen an der Universität im Schnitt mehr Hirnregionen, um Aufgaben zu bewältigen, als das in der Schule der Fall war.

Noch schlimmer: Wir haben in der Schule gelernt, uns zu konzentrieren. Wer das gut konnte, konnte Mathe-Aufgaben gut lösen. Aber was ist Konzentration überhaupt? Wenn wir uns konzentrieren, sagt die eine Hirnregion den anderen „Sei still und störe mich nicht!“ Manchmal ist das eine ganz wichtige Sache, um ein Problem lösen zu können. Was aber, wenn die Aufgabe, die gerade ansteht, gar nicht alleine in der Region gelöst werden kann, die die anderen „abschaltet“? Sich stärker zu konzentrieren, ein Lösungsansatz, den viele Studenten in den ersten Semestern oft wählen, führt jedenfalls offensichtlich nicht weiter.

Deshalb empfehle ich Ihnen: Wenn Sie bemerken, dass Sie für eine Aufgabe keine Lösung finden, obwohl Sie sich konzentrieren, tun Sie lieber das Gegenteil: Entkonzentrieren Sie sich!

- Hören Sie auf, das Problem mit „mehr Konzentration“ lernen zu wollen
- Geben Sie Ihrem Gehirn so viele Sinneseindrücke wie möglich (Verlassen Sie zum Beispiel Ihre Wohnung und sehen Sie die Welt aus einer neuen Perspektive!)
- Vertrauen Sie Ihrem Gehirn, dass es auch an dem Problem arbeiten wird, während Sie sich nicht konzentrieren. Viele bedeutende Probleme sind schon auf Spaziergängen gelöst worden.

1.3.4 Wiederholung

Wie oft müssen Sie etwas wiederholen, bis Sie es wirklich gut können? Es gibt keine für alle Menschen gültige Antwort auf diese Frage, aber 30 Wiederholungen für Mathematik-Aufgaben sind ein guter Anhaltspunkt.

Wenn ich Sie beispielsweise nach den Monaten frage, werden Sie antworten "Januar, Februar, März, April, ..." und so weiter. Sie werden auf diese Weise die Monate sehr schnell aufsagen können. Ganz anders ist es, wenn Sie dieselben Monate in alphabetischer Reihenfolge aufsagen sollen.

"April, August,..." Welches ist der nächste? Probieren Sie es, Sie werden viel, viel langsamer sein als bei der zeitlichen Reihenfolge. Wenn Sie die Sache aber morgen wiederholen, dann werden Sie schon etwas schneller sein. Und beim dritten Mal dann noch etwas schneller.

Daher meine nächste Empfehlung: **Wiederholen Sie Ihre Aufgaben!**. Was Sie im Oktober gelernt haben, wiederholen Sie im November, Dezember usw. Das müssen keine langen Sitzungen sein, es geht nur darum, Ihre Synapsen etwas „aufzufrischen“. Die werden dabei nämlich etwas dicker, lassen mehr Strom durch und beim nächsten Mal klappt es dadurch besser. Wenn Sie wiederholen – oft reichen 15 Minuten - werden Sie gut auf Ihre Prüfungen vorbereitet sein. Wenn Sie aber im November etwas lernen und das nächste Mal einen Tag vor der Prüfung draufschauen, dann kann es sein, dass das etwas spät ist.

Ein Punkt ist da noch wichtig. Es ist für Sie vielleicht gut, etwas im Laufe des Semesters 30 mal zu wiederholen, damit Sie es gut können. Es ist aber nicht möglich, dass Sie von Ihrem Professor zu jedem Aufgabentyp 30 Aufgaben bekommen. **Stellen Sie sich daher Ihre eigenen Aufgaben!** Seien Sie Ihr eigener Lehrer! Oft finden Sie auch die Aufgaben, die Ihr Gehirn braucht, mit der Suchmaschine im Internet.

In dem Zusammenhang empfehle ich Ihnen die Vorträge von **Vera F Birkenbihl** auf youtube. Unser Ausflug in die Hirnforschung ist an dieser Stelle zu Ende. Jetzt geht es los mit der Mathematik!

2 Die verschiedenen Zahlenmengen

2.1 Von den natürlichen zu den reellen Zahlen

Zahlen sind erst einmal zum Zählen da. Und das tun Menschen schon sehr, sehr lange. Die Zahlen, die wir dafür benutzen, sind $1,2,3,4,....$. Die Mathematiker haben sich angewöhnt, sie die **natürlichen Zahlen** zu nennen, und natürlich ein Symbol dafür eingeführt. Ein N mit einem zusätzlichen Strich:

$$\mathbb{N}=\{\ 1,2,3,...\ \}$$

Mit dem arabischen Ziffernsystem ist die "0" wichtig geworden, und so schreiben wir

$$\mathbb{N}_0\ =\ \{\ 0\ \}\ \cup\ \mathbb{N}\ =\ \{\ 0,1,2,3,...\ \}\quad .$$

Der Bogen zwischen den beiden Mengen steht dabei für die „Vereinigung“ von zwei Mengen, bei der wir die Elemente erhalten, die entweder in der einen oder der anderen Menge sind.

Als nächstes ergänzen wir diese Menge mit den **negativen Zahlen** und bekommen so die **ganzen Zahlen**:

$$\mathbb{Z}=\mathbb{N}\ \cup\ \{\ -n\ \mid\ n\in\mathbb{N}\ \}\ =\ \{\ ...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\ \}$$

Diese negativen Zahlen sind einmal erfunden worden, weil man mit Ihnen Schulden zählen kann. Das ist übrigens noch gar nicht so lange her. Jakob Fugger kam im 16. Jahrhundert bei seiner Unternehmensbilanz noch ohne sie aus.

Die nächstgrößere Menge bekommen wir, wenn wir ganze Zahlen dividieren. Das tun wir natürlich nicht mit der 0 im Nenner und so bekommen wir die **rationalen Zahlen**:

$$\mathbb{Q}\ =\ \{\ \frac{z}{n}\ \mid\ z\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}\ \}$$

Seit wir unsere Zahlen im arabischen Ziffernsystem schreiben, gibt es dieselben Zahlen auch als **Dezimalbrüche**. Sie alle kennen sicher

$$\frac{1}{4}\ =\ 0.25\ \text{ und }\frac{1}{3}\ =\ 0.\overline{3}$$

Ihr Taschenrechner zeigt diese Dezimalbrüche an, und es ist einfach, Dezimalbrüche der Größe nach zu ordnen.

Während es nicht so offensichtlich ist, dass $\frac{4}{7} > \frac{1}{2}$, können Sie einfach erkennen, dass $0.\overline{571428} > 0.5$ ist.

Wenn Sie also Zahlen vergleichen – oder der Größe nach ordnen – ikönnen Sie dies tun, indem Sie sie in Dezimalbrüche umwandeln. Und weil die Brüche von ganzen Zahlen immer **periodisch** sind (das bedeutet, dass sich Zahlenfolgen bei den Nachkommastellen irgendwann einmal wiederholen), können wir die rationalen Zahlen auch so schreiben:

$$\mathbb{Q} = \{ \; x \;|\; \text{x ist ein - endlicher oder periodisch unendlicher - Dezimalbruch} \; \}$$

Schon in der Antike merkten die Menschen aber, dass das noch nicht alle möglichen Zahlen sind. Nich alle Zahlen sind Brüche von ganzen Zahlen. Es ist nämlich unmöglich, $\sqrt{2}$ als so einen Quotienten zu schreiben. Aber es ist eine sinnvolle Länge: Wenn bei einem rechtwinkligen Dreieck die beiden Katheten die Länge 1 haben, dass ist es die Länge der Hypothenuse. Sie erinnern sich an den Satz des Pythagoras.

Es ist gar nicht so einfach, die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ zu definieren. Wir übernehmen daher an dieser Stelle die Definition, die Sie vielleicht aus der Schule kennen:

$$\mathbb{R} = \{ \; x \;|\; \text{x ist - endlicher oder unendlicher - Dezimalbruch} \; \}$$

Die bekanntesten Beispiele für reelle Zahlen, die nicht rational sind, sind:
$\sqrt{2}, e \text{ und } \pi$.

2.2 Einige Varianten, um Teilmengen auszudrücken

Wenn wir in einer Menge links die Obermenge angeben, dann einen senkrechten Strich schreiben und rechts davon eine oder mehrere Eigenschaften angeben, die die Zahlen zusätzlich besitzen sollen, dann bekommen wir Teilmengen. Ein Beispiel dafür ist:

$$\{ \; x \in \mathbb{R} \;|\; x > 60 \; \}$$

Das ist aber oft umständlich. Statt Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $\{\ x \in \mathbb{R}\ |\ ...\ \}$ auszudrücken, verwenden wir kürzere Terme. Ein Beispiel:

$$\{\ x \in \mathbb{R}\ |\ x > 0\ \} = \mathbb{R}^{\geqslant 0}$$

Eine andere Schreibweise ist die von der Schule her bekannte Intervallschreibweise. Hier einige Beispiele zur Erinnerung:

$$\begin{array}{ll}
[0{,}5] = \{\ x \in \mathbb{R}\ |\ 0 \leqslant x \leqslant 5\ \} & (ein\ abgeschlossenes\ Intervall) \\
[0{,}5) = \{\ x \in \mathbb{R}\ |\ 0 \leqslant x < 5\ \} & \\
(0{,}5] = \{\ x \in \mathbb{R}\ |\ 0 < x \leqslant 5\ \} & \\
(0{,}5) = \{\ x \in \mathbb{R}\ |\ 0 < x < 5\ \} & (ein\ offenes\ Intervall) \\
[0,\infty) = \{\ x \in \mathbb{R}\ |\ 0 \leqslant x\ \} & \\
(-\infty{,}5] = \{\ x \in \mathbb{R}\ |\ x \leqslant 5\ \} &
\end{array}$$

Das Symbol ∞ steht dabei für „unendlich“, es sagt also aus, dass das Intervall $[0,\infty)$ überhaupt keine obere Grenze besitzt.

2.3 Größenordnung – von ganz kleinen und ganz großen Zahlen

Manchmal geht es um richtig große Zahlen. "Die öffentliche Verschuldung der USA war am 15. Dezember 18.900 Milliarden Dollar". Was bedeutet das?

In der Mathematik benutzen wir Exponenten der Zahl 10, um große Zahlen auszudrücken. Zum Beispiel sagen wir "**Tausend**" und meinen eine "1" mit drei "0"en. Wir sagen "**Million**" und meinen eine "1" mit sechs "0"en. In Exponentialschreibweise sehen diese Zahlen so aus: 10^3 und 10^6 .

Was es kompliziert macht, ist, dass die Begriffe im deutschen und englischen Sprachraum unterschiedlich gehandhabt werden, wenn es um die größeren Zahlen geht. Schauen wir uns dazu die folgende Tabelle an:

Zahl	**Exponentialschreibweise**	**englisch**	**deutsch**
1000	10^3	thousand	tausend
1000000	10^6	million	million
1000000000	10^9	billion	milliarde
1000000000000	10^{12}	trillion	billion
1000000000000000	10^{15}	quadrillion	billiarde
...	...	...	...

Wenn also in einer amerikanischen Zeitung "The american public debt has reached 19 trillion dollar" steht, wäre die richtige Übersetzung "19 Billionen Dollar". Wenn wir im Englischen von "300 billions of Euro" dann wäre die korrekte Übersetzung "300 Milliarden Euro". Da vertun sich die Wirtschaftsjournalisten sehr oft und daher sollten wir diese Falle kennen und umgehen.

2.4 Rechengesetze

Sehr schnell haben die Menschen, die vor 5000 Jahren begannen, sich intensiver mit Zahlen zu beschäftigen, gemerkt, dass es da Dinge gibt, die immer gleich ablaufen, Gesetzmäßigkeiten. So ist es bei der Addition gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die Zahlen addiert, 5+7 und 7+5 führt zum gleichen Ergebnis. In der mathematischen Formelsprache ausgedrückt gilt für alle reellen Zahlen:

$$x+y=y+x$$

Wir sagen dazu heute „Kommutativgesetz der Addition.

Wenn wir 3 Zahlen addieren, dann ist es auch gleichgültig, ob wir die dritte Zahl zur Summe der ersten beiden addieren oder ob wir die erste Zahl zur Summe der letzten beiden Zahlen addieren. Derselbe Sachverhalt als Formel:

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

Diese Tatsache nennen wir „Assoziativgesetz der Addition. Die Multiplikation wurde einem erfunden, weil man immer wiederkehrend die gleiche Addition machen musste. Da ist es einfacher, statt $5+5+5+5+5+5$ zu schreiben $5\cdot 6$ und sich das Ergebnis einfach zu merken. Noch heute lernt man in der Schule das „kleine und große 1 mal 1“. Und auch für diese Operation gelten die gleichen Gesetze, die schon für die Addition galten, es gilt also

$x\cdot y=y\cdot x$ und $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$, und damit haben wir das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz der Multiplikation.

Es gibt aber auch noch ein Gesetz, dass die Addition und die Multiplikation miteinander verbindet. Als Formel aufgeschrieben lautet es

$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ oder, gleichwertig, $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$

und man nennt es heute das Distributivgesetz.

Hier haben wir die ältesten und einfachsten Rechengesetze, die seit Jahrtausenden viel Arbeit sparen, indem man die jeweils aufwändigere Rechnung durch die einfachere ersetzen kann. Dabei ist wichtig, dass das Gleichheitszeichen immer symmetrisch ist, dass es also keine Rolle spielt, was jeweils links und rechts davon steht. Das haben Sie beim Distributivgesetz sicherlich gelernt. Die Strategie,

$5\cdot 7+2\cdot 7$ durch $(5+2)\cdot 7$ zu ersetzen, heißt dabei „Ausklammern“, wenn Sie umgekehrt statt $(5+2)\cdot 7$ $5\cdot 7+2\cdot 7$ schreiben, dann „multiplizieren Sie aus.

Bei der Addition und Multiplikation finden wir die ersten „Rechengesetze“ (die streng genommen keine Gesetze sind, sondern eine Theorie dieser Operationen), und Sie wissen es sicherlich bereits: Dieses Konzept wird uns begleiten, solange wir uns mit Mathematik beschäftigen. Es wird Logarithmusgesetze geben, Sinus-Gesetze und diverse Regeln der Differential- und Integralrechnung. Für Sie ist jeweils wichtig, Sicherheit darüber zu besitzen, welche der Regeln im jeweiligen Zusammenhang gültig und andwendbar sind. So gilt bei Matrizen z.B. ein Assoziativ-Gesetz und ein Distributiv-Gesetz wie bei den Zahlen. Auch das Kommutativgesetz der Addition gilt dort. Das Kommutativgesetz der Multiplikation gilt aber dort nicht! Unsicherheit bei den Regeln führt zu vielen Fehlern, weil man mit der jeweiligen Aufgabe ohne die Anwendung der jeweiligen Regeln einfach nicht weiterkommt. Die ersten dieser Gesetze werden wir im nächsten Abschnitt kennenlernen, und werden sehen, dass es dabei recht schnell kompliziert wird.

2.5 Potenzgesetze

So wie die Multipllikation entstanden ist, um wiederholte Additionen schneller zu machen, so kann natürlich auch das Problem auftreten, dass Multiplikationen wiederholt durchzuführen sind. Die „Abkürzungen“, die es dafür gibt, sind die Potenzgesetze. Wenn wir zum Beispiel eine Zahl x 7 mal miteinander Multiplizieren, können wir dies tun, indem wir sie erst 5 mal mit sich selbst multiplizieren und dann noch 2 mal. Als Formel:

$$x^7 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5 \cdot x^2$$

Dabei sind die Zahlen 7, 5 und 2 natürlich noch willkürlich, wenn wir sie durch Platzhalter ersetzen, bekommen wir:

$$x^{(a+b)} = x^a \cdot x^b$$

Genauso können wir aus $\frac{x^7}{x^5} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = x^2$ erkennen, dass das Gesetz

$$x^{(a-b)} = \frac{x^a}{x^b}$$ gilt.

Daraus können wir wiederum sehen, dass $x^0 = 1$ gelten muss (allerdings nicht, wenn x selber 0 ist, da es dann ja im Nenner der obigen Formel stünde) und aus den bisherigen Formeln bekommen wir

$x^{-a} = x^{(0-a)} = \frac{1}{x^a}$. Damit haben wir schon eine kleine Theorie der Potenzrechnung. Wir können die aber noch um Brüche erweitern. Wenn x > 0 ist, gilt nämlich

$x^{(\frac{1}{2})} \cdot x^{(\frac{1}{2})} = x^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = x$, und daher muss $x^{(\frac{1}{2})} = \sqrt{x}$ gelten, da die Wurzel einer Zahl x, mit sich selbst multipliziert, ja ebenfalls x ist. Und das gilt nicht nur für den Exponenten $\frac{1}{2}$, sondern für jeden Kehrwert, es gilt also:

$$x^{(\frac{1}{a})} = \sqrt[a]{x} \quad .$$

Ein weiteres Gesetz bekommen wir wenn wir uns einen Exponenten anschauen bei zwei Basen. Schauen wir einmal, was da beim Exponenten 2 passiert:

$$x^2 \cdot y^2 = x \cdot x \cdot y \cdot y = x \cdot y \cdot x \cdot y = (x \cdot y)^2$$

Schließlich gelten ja das Kommutativgesetz und Assoziativgesetz der Multipllikation und nichts anderes haben wir hier angewandt.

Und was der Zahl 2 recht ist, geht natürlich auch für die anderen und so erhalten wir noch eine weitere Regel:

$$x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$$

Ähnlich kann man sich an einem Beispiel noch die Regel

$$(x^a)^b = x^{(a \cdot b)}$$

herleiten. (Versuchen Sie es einmal mit 2 und 3 für a und b!)

Und damit haben wir hier nicht weniger als 7 Regeln der Potenzrechnung und Sie merken, dass Thema bleibt nicht ganz so einfach, wie es mit der Addition und Multipllikation begonnen hat. Sie können sich diese 7 Regeln auswendig merken und jeweils richtig anwenden? Prima! Wenn aber nicht, ist es ganz hilfreich, wenn Sie sich diese Regeln aus den einfachen Regeln am Beispiel schnell herleiten können, wie wir es hier getan haben. Dann reichen die Rechengesetze der Multiplikation und das Wissen „Potenzieren ist wiederholtes Multiplizieren“ aus und Sie müssen sich weniger merken. Welchen Weg Sie an dieser Stelle gehen, ist individuell, da gibt es keinen Weg, der für alle der Beste ist. Probieren Sie es also aus!

3 Gleichungen und Ungleichungen

3.1 Das Sigma-Zeichen – wie wir Summen aufschreiben

Es ist kein Problem, wenn wir 3 Zahlen addieren sollen, zu schreiben:

$$1 + 2 + 3$$

Aber was ist, wenn wir die Summe der ersten 50 natürlichen Zahlen aufschreiben sollen? Ein erster, intuitiver Ansatz ist, Punkte zu verwenden:

$$1 + 2 + \ldots + 50 \quad .$$

In dem Fall funktioniert das auch wunderbar. Aber vielleicht wollen wir auch die ersten 50 **ungeraden** Zahlen aufschreiben.? Oder die ersten 50 Primzahlen? Da können wir Fälle bekommen, bei denen wir mit den Pünktchen nicht mehr genau wissen, was gemeint ist. Daher gibt es in der Mathematik das Summenzeichen.

Die Summe der ersten 50 Zahlen :

$$\sum_{i=1}^{50} i = 1 + \ldots + 50$$

die geraden natürlichen Zahlen bis 50

$$\sum_{i=1}^{25} 2 \cdot i = 2 + 4 + \ldots + 50$$

die ungeraden natürlichen Zahlen bis 50

$$\sum_{i=0}^{24} (2 \cdot i + 1) = 1 + 3 + \ldots + 49$$

3.2 Gleichungen

Im 16. Jahrhundert schrieb ein englischer Arzt - Robert Recorde – Bücher über mathematische Themen. Unter anderem brachte er die arabischen Ziffern nach England. Er – und sein Setzer -hatten dabei das Problem, dass in diesen Bücher sehr oft der Text „is equal" („ist gleich") vorkam. So ersetzten sie diesen Text durch zwei waagerechte Striche und

=

das Gleichheitszeichen war geboren..

Gleichungen zu lösen – manchmal exakt und manchmal näherungsweise, ist ein mächtiges Werkzeug, um Probleme zu lesen, die für Menschen bedeutungsvoll sind. Wenn Sie z.B. ein Rechenmeister des 15. Jahrhunderts wären und die richtigen quadratischen Gleichungen lösen konnten, dann konnten Sie den Flug der Kanonenkugeln vorausberechnen. So konnten die Kanonen Ihres Fürsten richtig ausgerichtet werden und trafen mit viel höherer Wahrscheinlichkeit den Pulverturm der Stadt. Natürlich entlohnte der jeweilige Fürst Rechenmeister, die das konnten, entsprechend. Eine Stadt zu belagern hieß übrigens im englsichen „to invest a town", so dass wir sehen können, was das Wort „Investition" ursprünglich meinte.

Sie erinnern sich sicher, dass wir Gleichungen lösen, indem wir „auf beiden Seiten der Gleichung das Gleiche tun" und zwar jeweils "das Gegenteil von dem, was wir sehen". Ein Beispiel:

$$\begin{array}{rcll} 3\cdot x + 7 & = & 19 & | \quad -7 \\ & & \multicolumn{2}{r}{wir\ sehen +7, also -7} \\ 3\cdot x & = & 12 & | \quad \div 3 \\ & & \multicolumn{2}{r}{wir\ sehen\ 3\cdot, also \div 3} \\ x & = & 4 & \end{array}$$

Oft wird die Waage als Metapher für diese Strategie verwendet. Mit ihr formen wir die Gleichung um, bis wir die Lösung für unsere Unbekannte ablesen können..

3.2.1 Äquivalenz- und Nicht-äquivalenz-Umformungen

Bei linearen Gleichungen (bei denen nur die Operationen $+,-,\cdot$ aufzulösen sind, gibt es fast kein Problem, an unsere Lösung zu kommen. (Solange wir vermeiden, beide Seiten der Gleichung mit 0 zu multiplizieren.) Schauen wir uns aber ein Beispiel mit Quadratwurzeln an:

$$\sqrt{x-2} - 1 - \sqrt{3-x} = 0$$

$$\sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{3-x} \qquad | \ (...)^2$$

$$x - 2 = 1 + 2\cdot\sqrt{3-x} + 3 - x \qquad | \ -4 + x$$

$$2\cdot x - 6 = 2\cdot\sqrt{3-x} \qquad | \ \div 2$$

$$x - 3 = \sqrt{3-x} \qquad | \ (...)^2$$

$$x^2 - 6\cdot x + 9 = 3 - x \qquad | \ + x - 3$$

$$x^2 - 5\cdot x + 6 = 0 \qquad | \ pq-Formel....$$

$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}$$

$$x_1 = 3, x_2 = 2$$

Das sieht gut aus, aber lassen Sie uns testen, ob unsere „Lösungen die Ausgangsgleichung erfüllen:

$$\sqrt{3-2} - 1 - \sqrt{3-3} = 1 - 1 - 0 = 0 \quad | \ OK$$

$$\sqrt{2-2} - 1 - \sqrt{3-2} = 0 - 1 - 1 = 0 \quad | \ ???$$

Eine unserer Lösungen - 3 – löst die Gleichung wirklich, die andere Lösung aber führt zu einem falschen Ergebnis. So kommen wir zum Begriff der „Äquivalenzumformungen“. Das sind die, die wir auch rückwärts durchführen könnten. Diese Umformungen sind mit einem $\Leftrightarrow$ gekennzeichnet, die anderen mit einem $\Rightarrow$. Wie wir jetzt gesehen haben – das Quadrieren beider Seiten einer Gleichung ist keine Äquivalenzumformung. Wenn wir diese Zeichen im Beispiel oben ergänzen:

$$\sqrt{x-2} - 1 - \sqrt{3-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{3-x} \quad | \ (...)^2$$

$$\Rightarrow x - 2 = 1 + 2\cdot\sqrt{3-x} + 3 - x \quad | \ -4 + x$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot x - 6 = 2\cdot\sqrt{3-x} \quad | \ \div 2$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = \sqrt{3-x} \quad | \ (...)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 6\cdot x + 9 = 3 - x \quad | \ + x - 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5\cdot x + 6 = 0 \quad | \ pq-formula....$$

$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}$$

$$x_1 = 3, x_2 = 2$$

Note: Wenn wir Gleichungen lösen, nutzen wir auch Nicht-Äquivalenz-Umformungen. Wir müssen dies auch manchmal tun, um an die Lösungen zu kommen. In diesem Fall müssen wir aber am Ende wie im Beispiel oben testen, ob unsere Lösungen wirklich in die Ausgangsgleichung passen und nur Kandidaten, die das tun, sind wirklich Lösungen der Gleichung.

3.3 Ungleichungen

Manchmal sind die Informationen, die wir über eine Sache haben, nicht präzise genug, um das Gleichheitszeichen zu benutzen. Wir haben aber eine Information über eine Einschränkung, zum Beispiel: "Wir können maximal 100.000 € maximal ausgeben“ Wenn wir dann z.B. von diesem Geld zwei Artikel kaufen, die jeweils einen Preis A und B haben, bekommen wir eine Ungleichung:

$$x \cdot A \;+\; y \cdot B \;\leqslant\; 100.000\,€$$

In der Ökonomie gibt es manchmal direkt eine ganze Reihe von solchen Ungleichungen und die Aufgabe, unter den Restriktionen den Punkt mit dem maximalen Profit zu finden. Diese Aufgabe heißt dann „lineare Optimierung“ und Sie sehen, es kann sinnvoll sein, sich etwas mit diesen Ungleichungen auszukennen.

Ungleichungen zu behandeln ist sehr ähnlich zum Umgang mit Gleichungen, es gibt aber einen wichtigen Unterschied: Wenn wir beide Seiten einer Gleichung mit derselben Zahl multiplizieren oder dividieren und diese Zahl kleiner als 0 ist, dann dreht sich das Ungleichheitszeichen um. Wenn unser Faktor größer als 0 ist, passiert das nicht.

$$\begin{array}{rclcl} -3 \cdot x + 14 & \leqslant & 2 & | & -14 \\ -3 \cdot x & \leqslant & -12 & | & \div(-3) \\ x & \geqslant & 4 & & \end{array}$$

3.4 Lineare Gleichungen

Einfache Probleme, oft aus der Ökonomie, können mit linearen Gleichungen beschrieben werden:

"Wie viele Teile eines Artikels können wir kaufen, wenn ein Teil 3€ kostet und wir 24€ zur Verfügung habenl?" Natürlich ist die Lösung

$$\begin{array}{rclcl} 3 \cdot x & = & 24 & | & \div 3 \\ x & = & 8 & & \end{array}$$

Ein weiteres, etwas komplizierteres Beispiel: "Wir produzieren einen Artikel zu Kosten von 4€ pro Stück und haben zusätzlich 100€ Fixkosten. Wie viele Teile müssen wir zu 5,50€

verkaufen, um einen Gewinn zu machen?"

$$\begin{array}{rcll} 4\cdot x + 100 &=& 5.50\cdot x & \mid -4\cdot x \\ 100 &=& 1.5\cdot x & \mid \div 1.5 \\ 66.66.. &=& x & \end{array}$$

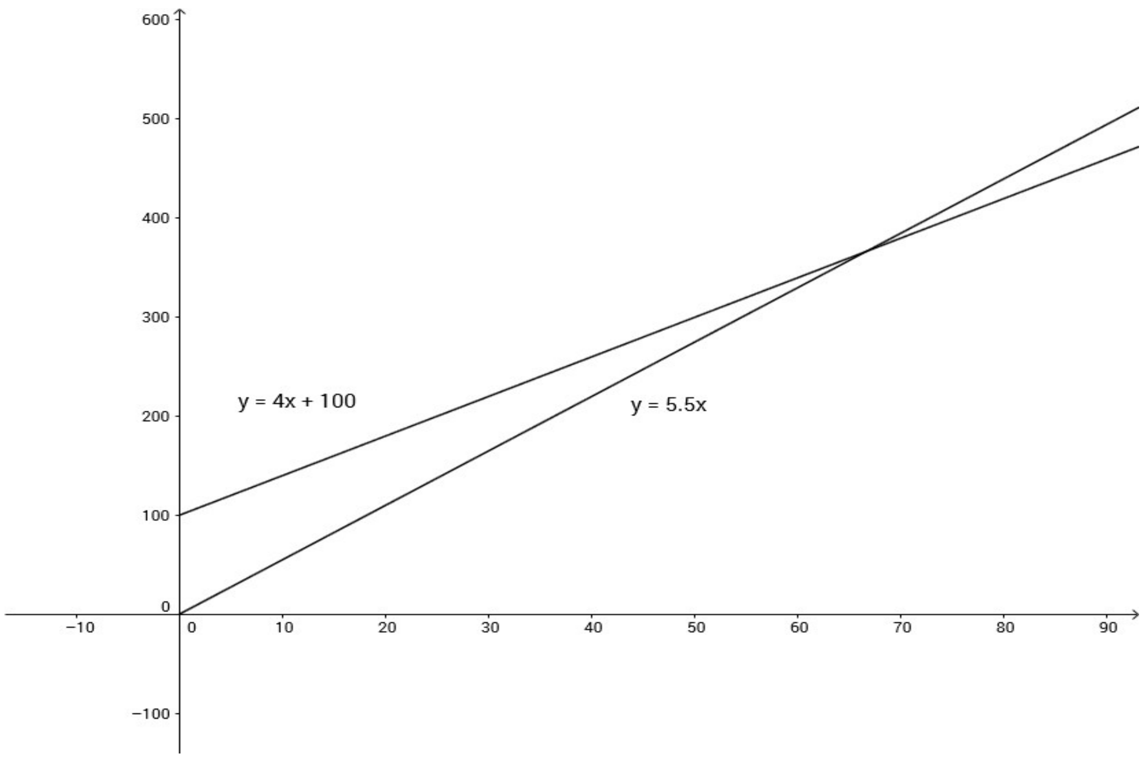
Die Kosten sind hier durch eine Gerade beschrieben

$$4\cdot x + 100 = y$$

und die Einnahmen sind durch eine weitere Gerade beschrieben

$$5.5\cdot x = y$$

Und durch unsere Rechnung haben wir den Schnittpunkt der beiden Geraden gefunden.

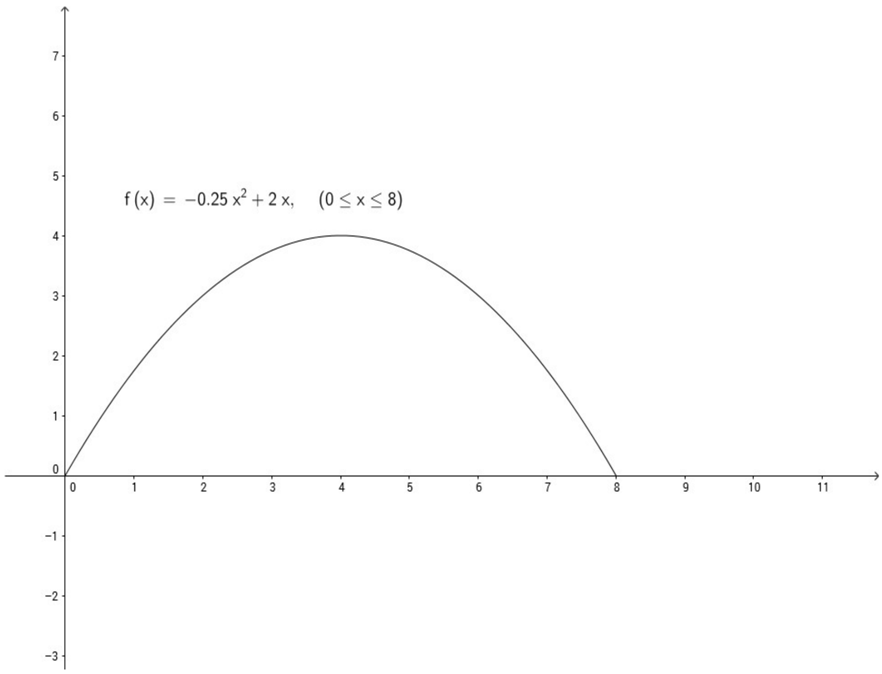


Ähnlich ist es, wenn wir zwei Handyverträge vergleichen wollen. Der eine hat eine Grundgebühr von 7€ und kostet 10ct pro Minute, der andere kostet 10€ fix and 5ct pro Minute.

Wenn Sie mögen, lösen Sie das Problem mit dem Ansatz der linearen Gleichungen!

3.5 Quadratische Gleichungen

Wie schon erwähnt, sind quadratische Gleichungen ein wunderbares Mittel, um den Flug von Kanonenkugeln vorherzusagen. So kam diese Aufgabe in unser Leben und anschließend ergab sich, dass, diese Gleichungen auch in anderen Bereichen der Physik recht nützlich sein können. Im Weg-Zeit-Gesetz, das sich aus Newtons Gravitationsgesetz ergibt, kommen quadratische Terme vor:



Die meisten deutschen Schüler haben gelernt, zum Lösen von quadratischen Gleichungen die p/q-Formel zu benutzen:

Um die Gleichung

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

zu lösen, rechnen wir:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

(Vielleicht haben Sie stattdessen auch die „Mitternachtsformel“ gelernt, um die Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zu lösen, aber diese Formel ist eigentlich unnötig komplex und es ist einfacher, diese Gleichung durch a zu teilen und dann die p/q-Formel zu benutzen.)

Hier ein Beispiel, wie das mit der p/q-Formel geht:

$$
\begin{array}{lllllllll}
2\cdot x^2 & = & 4\cdot x & + & 6 & & & | & -4\cdot x \quad -6 \\
2\cdot x^2 & - & 4\cdot x & - & 6 & = & 0 & | & \div 2 \\
x^2 & - & 2\cdot x & - & 3 & = & 0 & &
\end{array}
$$

Nun wenden wir die Formel an:

$$x_{1,2} = -\frac{(-2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-3)} = 1 \pm \sqrt{4}$$

$$x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = -1$$

Aber warum bekommen wir mit dieser Formel überhaupt die richtige Lösung? Um dies zu verstehen, schauen wir uns einen Ansatz an, der „quadratische Ergänzung“ heißt und den Sie vermutlich auch in der Schule gezeigt bekommen haben:

Im ersten einfachen Fall sehen wir eine erste binomische Formel:

$$
\begin{array}{lll}
x^2 + 2\cdot x + 1 & = 0 & | \text{ die 1. binomische Formel erkennen...} \\
(x+1)^2 & = 0 & | \sqrt{(...)} \\
x & = -1 &
\end{array}
$$

Unser zweiter Fall ist ein wenig komplexer:

$$
\begin{array}{lll}
x^2 + 2\cdot x - 3 & = 0 & | \text{ wir erkennen die 1. binomische Formel dennoch...} \\
x^2 + 2\cdot x + 1 - 4 & = 0 & | +1 - 4 = -3 \\
(x+1)^2 - 4 & = 0 & | + 4 \\
(x+1)^2 & = 4 & | \sqrt{(...)}, \text{ Vorsicht, hier gibt es zwei Lösungen!} \\
(x+1) & = \pm 2 & | -1
\end{array}
$$

$$x_1 = -1 + 2 = 1 \quad , \quad x_2 = -1 - 2 = -3$$

Vielleicht denken Sie, das ist eine Menge überflüssiger Arbeit, um das Problem zu lösen, aber Vorsicht: In der Integralrechnung werden Sie die „Partialbrüche“ kennenlernen, und in diesem Zusammenhang werden Sie die Fähigkeit zur quadratischen Ergänzung benötigen. Die p/q-Formel wird dann nicht helfen! Daher wiederholen wir die quadratische Ergänzung an dieser Stelle schon, damit Sie es dann einfacher haben.

Nachdem wir die quadratische Ergänzung mit konkreten Zahlen kennengelernt haben, schauen wir Sie uns jetzt noch einmal mit den abstrakten p und q an und werden sehen, dass mit der quadratischen Ergänzung die p/q-Formel herauskommt:

$$x^2 + p\cdot x + q = 0$$
$$x^2 + 2\cdot\left(\frac{p}{2}\right)x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \quad \Big| \; +\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$
$$x^2 + 2\cdot\left(\frac{p}{2}\right)x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad \Big| \; \text{1. Binomische Formel}$$
$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad \Big| \; \sqrt{(...)}, \text{Vorsicht, zwei Lösungen!}$$

(Erinnern Sie sich, sie können keine Wurzeln von negativen Zahlen in $\mathbb{R}$ ziehen!)

$$\left(x+\frac{p}{2}\right) = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \Big| \; -\frac{p}{2}$$
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

So ist die p/q-Formel also eigentlich eine Abkürzung der quadratischen Ergänzung in dem Fall, dass man 0-Stellen von quadratischen Gleichungen sucht. Und wenn wir dieses Verfahren beherrschen und die p/q-Formel vergessen haben, können wir sie schnell wieder herleiten. Dazu kommt, dass wir mit der quadratischen Ergänzung Aufgaben lösen können, bei denen uns die p/q-Formel nicht hilft. In der Übung werden Sie die „Scheitelpunktsform“ von quadratischen Funktionen kennenlernen, die Sie auch mit diesem Verfahren herausbekommen.

3.6 Gleichungen höheren Grades, Polynomdivision

Wir haben in der Schule gelernt, quadratische Gleichungen zu lösen. Was ist aber, wenn unsere Gleichung nicht nur einen quadratischen Term hat, sondern z.B. noch einen „kubischen“:

$$x^3 - 6\cdot x^2 + 11\cdot x - 6 = 0$$

Für solche kubischen Gleichungen könnte man noch eine Formel analog zur p/q-Formel aufstellen, aber die ist kompliziert und schwer zu merken. Daher schauen wir uns hier einen anderen Ansatz an. Als erstes raten wir eine Nullstelle: Ist es 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4....? In unserem Fall sehen wir, dass 0 zwar keine Lösung ist, aber

$$1^3-6\cdot 1^2+11\cdot 1-6=0$$

Sie haben vermutlich die Polynomdivision in der Schule gelernt, und genau die wenden wir hier an, um an die anderen Lösungen der Gleichung zu kommen.

Wir dividieren unser Polynom durch (x - 1) – weil unsere geratene 1 eine 0-Stelle dieses Terms ist:

$$\begin{array}{l}
\quad x^3 - 6\cdot x^2 + 11\cdot x - 6 \div (x-1) = x^2 - 5\cdot x + 6 \\
-(x^3-x^2) \\
\hline
\quad -5\cdot x^2+11\cdot x-6 \\
-(-5\cdot x^2+5\cdot x) \\
\hline
\quad 6\cdot x - 6 \\
-(6\cdot x - 6) \\
\hline
0
\end{array}$$

Das Ergebnis der Division ist ein quadratisches Polynom, dessen Nullstellen wir z.B. durch die p/q-Formel bestimmen können. Es sind 2 und 3. Wenn wir unseren Ausgangsterm also als Produkt seiner 0-Stellen darstellen wollen, erhalten wir

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$$

Was wir auf diese Art gemacht haben, ist die „Faktorisierung“ des Terms.

3.6.1 Horner-Schema

Ein schnelleres Verfahren, um eine solche Polynomdivision durch eine 0-Stelle durchzuführen ist das "**Horner-Schema**". Wir schreiben die Koeffizienten unseres Polynoms in eine Tabelle und starten dabei mit der zweiten Spalte. Die 0-Stelle - in unserem Fall die 1 – kommt in die 1. Spalte und die 2. Zeile. Die 2. Zeile/2. Spalte bekommt eine "0". Unsere Tabelle bekommt 3 Zeilen:

	1	-6	11	-6
1	0			

Nun addieren wir die Werte der 2. Spalte und schreiben das Ergebnis darunter in die 3. Zeile.. Das Ergebnis multiplizieren wir mit der Zahl in der 1. Spalte - der 1 – und schreiben das Ergebnis in der nächsten Spalte in die 2. Zeile. Das wiederholen wir, bis wir die letzte Spalte erreicht haben:

	1	-6	11	-6
1	0	1	-5	6
	1	**-5**	**6**	0

Die "0", die wir als letztes in die 3. Zeile geschrieben haben, ist das Ergebnis von

$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6$ - da man mit diesem Verfahren - dem Hornerschema – Werte von Polynomen sehr schnell – mit einem Minimum an Multiplikationen – berechnen kann. Aber das Verfahren kann noch mehr: Die Werte links von der 0 sind die Koeffizienten des Ergebnisses der Polynomdivision:

$$x^2 - 5 \cdot x + 6$$

So können wir also das Horner-Schema als schnelles Verfahren der Polynomdivision benutzen. (Es gibt aber auch Anwendungen der Polynomdivision, bei denen das Horner-Schema nicht weiterhilft. Ehe Sie sich jetzt also ärgern, warum Sie dieses andere Verfahren in der Schule gelernt haben: Je nachdem können Sie es vielleicht doch brauchen!)

3.7 *Exponential- und logarithmische Gleichungen*

Die Geschichte des „Josefspfennig":

Christus war gerade geboren, da verdiente Josef einen Cent. Und er dachte, es sei eine gute Idee, diesen Cent bei der Bank von Nazareth für seinen Sohn anzulegen. Die Bank von Nazareth gab ihm für diesen Cent einen Zins von 3%. Später nahm die Geschichte seines Sohnes eine Wendung, von der wir alle gehört haben und so wurde das Geld nie mehr angerührt. Und durch Zins und Zinseszins wurde daraus ein ansehnliches Sümmchen.

Bevor Sie weiterlesen, wie viel Geld, schätzen Sie, ist aus dem Cent geworden?

....

Lassen Sie uns nun das Problem mit mathematischer Brille betrachten. Das erste, was wir tun können, um die Frage zu beantworten, ist, uns die Frage zu stellen: Wie viele Jahre dauert es bei einem Zinssatz von 3%, bis sich ein Kapital verdoppelt hat?

Wir suchen eine Lösung für die Gleichung:

$$1.03^x = 2 \quad | \quad \log_{1.03}(..)$$

$$x = \log_{1.03}(2) \approx 24$$

Wie wir mit dem Taschenrechner einen Logarithmus zur Basis 1,03 berechnen können, werden wir uns später anschauen. An diesem Punkt ist nur wichtig, dass es bei einem Zinssatz von 3% 24 Jahre dauert, bis sich unser angelegter Cent verdoppelt hat. Hier sehen Sie übrigens einen wichtigen Zusammenhang zwischen Exponential- und Logarithmus-Termen. So wie wir die Quadratwurzel benutzten, um quadratische Gleichungen zu lösen, so benutzen wir nun Logarithmen, um Exponentialgleichungen zu lösen. Das allgemeine Prinzip dahinter ist die „Umkehrfunktion". Später bei den Funktionen werden wir uns das noch einmal näher anschauen.

$$\sqrt{x^2} = x, \forall x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \quad (\text{im Fall } x<0 \text{ haben wir } \sqrt{x^2} = -x), \quad \log_a(a^x) = x \, \forall x \in \mathbb{R}$$

Nach 24 Jahren haben wir also 2ct, nach 48 Jahren sind es 4ct, nach 72 Jahren 8ct usw.

Die nächste Frage ist: Wie oft hat sich unser Geld bis 2017 verdoppelt?. Das bekommen wir mit einer einfachen Division heraus:

$$2017 \div 24 \quad \approx \quad 84$$

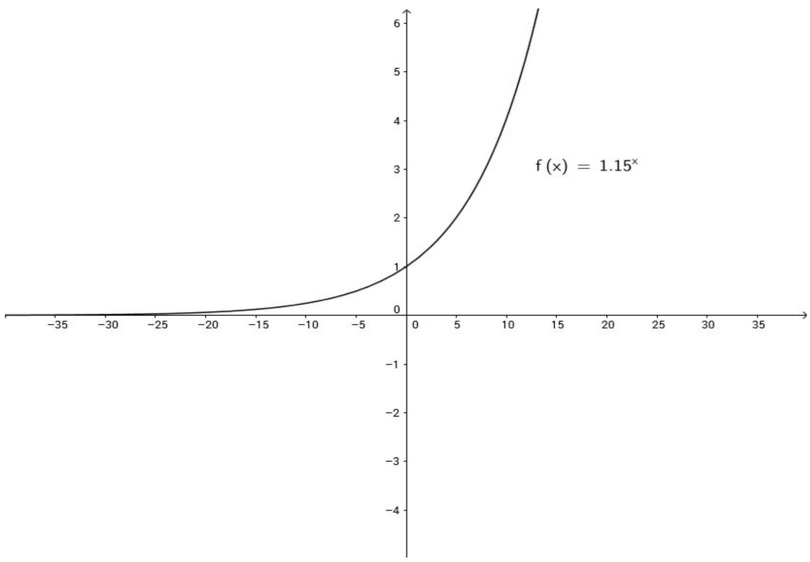
Nun, da wir wissen, wie oft sich der Cent verdoppelt hat, können wir mit Exponentialrechnung an die Lösung kommen:

$$1\text{ct} \cdot 2^{84} \quad = \quad 19342813113834066795298816\text{ct} \quad = \quad 193428131138340667952988.16\,€$$

Das ist eine **wirklich große** Zahl! Eine Zahl mit 24 Stellen. Viel mehr als Milliarden und Tausende Milliarden, mit denen wir in der letzten Finanzkrise und der Eurokrise vertraut wurden. Und viel mehr Geld, als auf dieser Welt überhaupt existiert.

Was können wir von dieser Geschichte lernen?

Zum einen: Wir bekommen durch das Lösen von Exponentialgleichungen manchmal Dinge heraus, die wir aus dem Bauch so nie vorhersagen würden. Lange Zeit passiert bei exponentiellem Wachstum nichts, was auffallen würde. Und nach dieser langen Zeit geht es plötzlich sehr schnell. Eine Skizze dieses exponentiellen Verlaufs wird daher auch schon einmal „Hockeyschlägerfunktion“ genannt, schauen Sie hier, warum:



Und zum zweiten: Da es um Zinsen, Renditen und Inflation geht, sind diese Exponential- und Logarithmus-Berechnungen gerade im ökonomischen Umfeld wichtig.

3.7.1 Wie man allgemein Exponential- und Logarithmus-Werte berechnet

In unserem kleinen Beispiel mussten wir einen Logarithmus zur Basis 1.03 and eine Exponentialfunktion zur Basis 2 berechnen. Viele Taschenrechner können aber nur mit den Basen "e" (=2.718....) oder 10 umgehen.

Wir brauchen daher 2 Regeln, um solche Berechnungen auch für andere Basen machen zu können:

$$a^x = e^{\ln(a)\cdot x} = 10^{\log_{10}(a)\cdot x}$$

$$\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\ln(x) = \frac{1}{\log_{10}(a)}\cdot\log_{10}(x)$$

Warum diese beiden Regeln gelten, wollen wir uns plausibel machen:

Dafür schauen wir uns zunächst eine erste Logarithmus-Regel am Beispiel des ln(x) an. Es ist

$$e^{\ln(x\cdot y)} = x\cdot y$$

, da die e-Funktion und der ln sich gegenseitig aufheben. Es gilt wegen der oben schon hergeleiteten Potenzgesetze aber auch

$$e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)}\cdot e^{\ln(y)} = x\cdot y$$

insgesamt also $e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x\cdot y)}$. Wenn wir nun auf beiden Seiten der Gleichung den ln() anwenden, sehen wir, dass $\ln(x)+\ln(y)=\ln(x\cdot y)$ gilt. Und diese Regel gilt entsprechend für alle Logarithmen, wir haben ja überhaupt nichts benutzt, was wir mit einer Basis a nicht hätten machen können. Aus dieser Regel können wir uns eine zweite Regel plausibel machen. Es ist ja $\ln(x^2)=\ln(x\cdot x)=\ln(x)+\ln(x)=2\cdot\ln(x)$ und wir könnten diese Rechnung mit beliebigen Potenzen ausführen. So bekommen wir

$$\ln(x^y) = y\cdot\ln(x) \quad ,$$

und diese Regel ist auch auf alle Logarithmen erweiterbar. Nun haben wir die Voraussetzung dafür, zu sehen, warum die erste der beiden Regeln oben gilt. Es ist nämlich:

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\cdot\ln(a)} \quad ,$$

und bis auf die Reihenfolge ist das genau das, was wir uns klarmachen wollten.

Nun schauen wir uns noch die zweite Regel an. Da sich die jeweilige Exponentialfunktion und ihr zugehöriger Logarithmus aufheben, gilt

$$a^{\log_a(x)}=x \quad .$$

Mit der ersten Regel können wir diese allgemeine Potenz aber auch als E-Funktion schreiben und so bekommen wir

$$e^{\ln(a)\cdot\log_a(x)}=x$$

Wenn wir nun bei dieser Gleichung auf beiden Seiten den ln() anwenden, erkennen wir, dass $\ln(a)\cdot\log_a(x)=\ln(x)$ gilt. Wenn wir diese Gleichung durch den ln(a) dividieren, sehen wir auch ein, dass auch die zweite Gleichung gilt.

Mit diesen beiden Regeln können wir die Werte für beliebige Basen berechnen: Wenn wir eine Exponentialfunktion kennen, kennen wir alle. Und wenn wir eine Logarithmusfunktion kennen, kennen wir alle.

4 Lineare Gleichungssysteme

Im 2. Kapitel haben wir bereits ein ökonomisches Problem als zwei lineare Gleichungen formuliert:

$$\begin{array}{lclcl} 4\cdot x & + & 100 & = & y \\ 5.5\cdot x & & & = & y \end{array}$$

Nun schauen wir uns dieses Konzept genauer an. Im zweiten Kapitel haben wir uns nicht groß darum gekümmert, dass wir ZWEI Gleichungen mit ZWEI Unbekannten hatten. Wir haben einfach die beiden gleichgesetzt und konnten so das x ausrechnen. Das ging, weil die Gleichungen die Form

$$a\cdot x+b \quad = \quad y$$

hatten und wir daher direkt sehen konnten, dass wir so schnell ans Ziel kommen. Wir könnten dasselbe Problem aber auch ein wenig anders formulieren:

$$\begin{array}{lclcl} 4\cdot x & + & (-1)\cdot y & = & -100 \\ 5.5\cdot x & + & (-1)\cdot y & = & 0 \end{array}$$

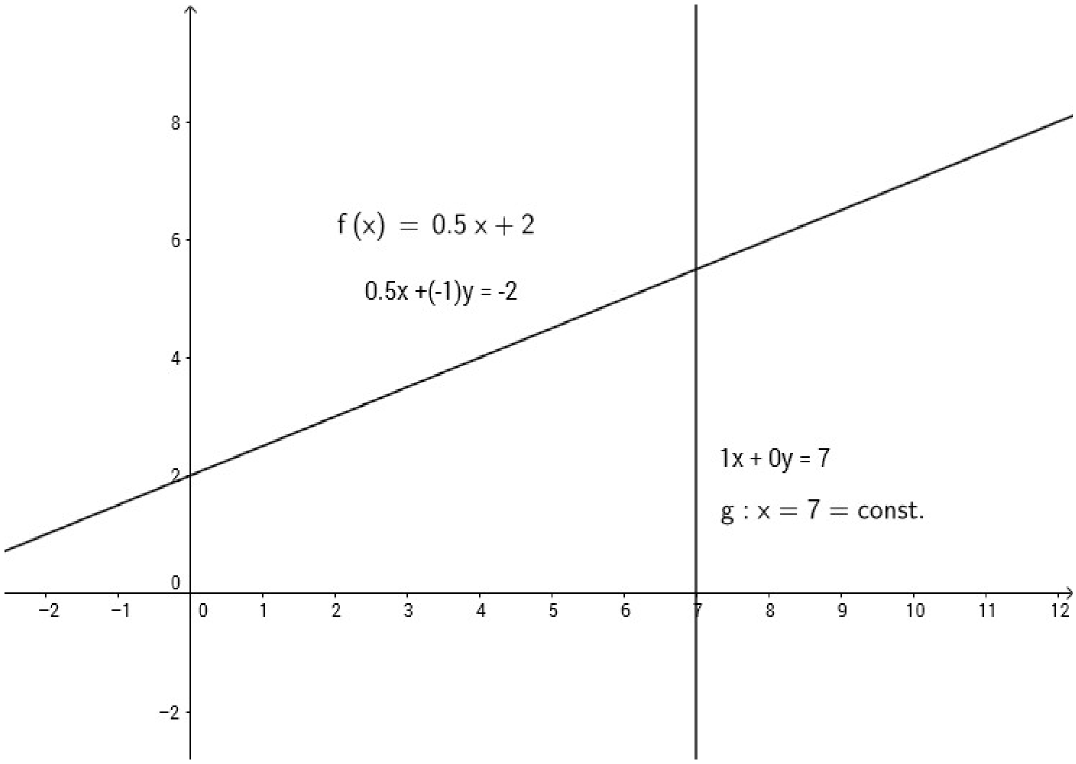
Und diese Form, das Problem zu formulieren hat einen großen Vorteil: Sie klappt für jede lineare Gleichung, wohingegen wir Geraden finden, die sich durch die Form

$$y \quad = \quad m\cdot x \quad + \quad b$$

nicht beschreiben lassen. Es sind die senkrechten Geraden, die durch Gleichungen der Form

$$x \quad = \quad const$$

beschrieben werden können, die wir aber nicht in die Form y = ... überführen können.



Ein weiterer Vorteil: Das Konzept ist einfach erweiterbar auf 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten, 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten usw.

Wenn wir solche Probleme formulieren, ist es keine gute Idee, eine der beiden Unbekannten – das y – zu bevorzugen, indem wir es auf die rechte Seite der Gleichung bringen. Bevor wir uns diesem Aufgabentyp – Lineare Gleichungssysteme höheren Grades – zuwenden, wiederholen wir noch einmal die Lösungsansätze, die Sie in der Schule schon gelernt haben.

4.1 Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren und Additionsverfahren

Diese 3 Verfahren haben gemeinsam, dass sie sich mit jeweils 2 Gleichungen und 2 Unbekannten beschäftigen.

4.1.1 Einsetzungsverfahren

Wir haben die beiden Gleichungen

$$\begin{array}{lllll} 2\cdot x & + & 3\cdot y & = & 5 \\ 1\cdot x & + & 2\cdot y & = & 3 \end{array}$$

wir formen die zweite Gleichung um

$$x = 3 - 2\cdot y$$

und setzen das x in die erste Gleichung ein:

$$2\cdot(3 - 2\cdot y) + 3\cdot y = 5$$
$$6 - 4\cdot y + 3\cdot y = 5$$
$$\ldots$$
$$y = 1$$

nach y rechnen wir auch noch x aus:

$$x = 3 - 2\cdot 1 = 1$$

Dies ist das Einsetzungsverfahren.

4.1.2 Gleichsetzungsverfahren

Das zweite, mit dem wir uns im 2. Kapitel schon beschäftigt haben, geht so:

Wieder haben wir zwei Gleichungen

$$\begin{array}{lllll} 1\cdot x & + & 3\cdot y & = & 4 \\ 1\cdot x & + & 2\cdot y & = & 3 \end{array}$$

Diesmal formen wir beide um

$$\begin{array}{lllll} x & = & 4 & - & 3\cdot y \\ x & = & 3 & - & 2\cdot y \end{array}$$

und wir setzen die beiden rechten Seiten gleich, weil beide = x sind

$$\begin{array}{lllllllll} 4 - 3\cdot y & = & 3 & - & 2\cdot y & | & -3 & + & 3\cdot y \\ 1 & = & y & & & & & & \end{array}$$

Wir setzen den Wert von y in eine der beiden Gleichungen ein und bekommen
$x = 1$

4.1.3 Additionsverfahren

Bei diesem Verfahren werfen wir eine der beiden Unbekannten aus dem System hinaus, indem wir die beiden Gleichungen addieren (oder, wenn diese bequemer ist, subtrahieren):

$$\begin{array}{llll} 1\cdot x & +2\cdot y & = & 3 \\ 1\cdot x & -2\cdot y & = & -1 \end{array}$$

Wir addieren die beiden Gleichungen und bekommen
$2\cdot x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

und wieder setzen wir das Ergebnis in eine der beiden Ausgangsgleichungen ein und bekommen
$y = 1$

4.2 Matrizen und Gauß-Verfahren

Während die Verfahren, die wir uns bisher angeschaut haben, an der Schule schon in der Mittelstufe gelehrt werden, schauen wir uns nun ein etwas systematischeres Vorgehen an, das prinzipiell unabhängig davon funktioniert, wie viele Gleichungen und Unbekannte wir haben.

4.3 Warum Matrizen? Übergangsmatrizen

Nehmen wir an, ein Supermarkt mit 3 Filialen in einer Region will seine Kundenwanderungen untersuchen. Eine Kundenbefragung kommt zu folgendem Ergebnis:

1. 80% der Kunden von Filiale 1 besuchen in der Folgewoche die gleiche Filiale. 10% gehen zu Filiale 2 and 10% gehen zu Filiale 3.
2. 90% der Kunden von Filiale 2 besucht in der Folgewoche die gleiche Filiale. 7% gehen zu Filiale 1 and 3% gehen zu Filiale 3.
3. 80% der Kunden von Filiale 3 besuchen in der Folgewoche die gleiche Filiale.. 15% gehen zu Filiale 2 and 5% gehen zu Filiale 1.

4. Wir schreiben all diese Zahlen in ein Schema, die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.07 & 0.05 \\ 0.1 & 0.9 & 0.15 \\ 0.1 & 0.03 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Eine solche Matrix mit Prozentzahlen, die Änderungen beschreiben, heißt Übergangsmatrix.

Wenn wir nun die Anzahl der Kunden in den Filialen in der einen Woche kennen, können wir die Anzahl in der nächsten Woche vorhersagen, indem wir diese Anzahl mit der jeweiligen Prozentzahl multiplizieren und die so erhaltenen Anzahlen addieren. Wenn die Anzahl z.B. in der einen Woche

$$\begin{pmatrix} 4000 \\ 3500 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

ist, ist das Ergebnis der nächsten Woche:

$$\begin{pmatrix} 0.8 \cdot 4000 + 0.07 \cdot 3500 + 0.05 \cdot 2000 \\ 0.1 \cdot 4000 + 0.9 \cdot 3500 + 0.15 \cdot 2000 \\ 0.1 \cdot 4000 + 0.03 \cdot 3500 + 0.8 \cdot 2000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3545 \\ 3850 \\ 2105 \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren also jeden Wert einer Zeile der Matrix mit dem entsprechenden Spaltenwert, der die Anzahl der Kunden angibt, und addieren die Werte, die wir so erhalten. Wir nennen diese Art zu rechnen, auch eine Multiplikation und zwar ist es die Multiplikation „Zeile mal Spalte“.

Mit diesem Verfahren können wir nicht nur die Werte der Folgewoche, sondern auch die Werte der vorigen Woche berechnen. Bevor wir schauen, wie das geht, kehren wir aber nun zurück zu unseren linearen Gleichungssystemen und formulieren sie in der Matrix-Schreibweise:

4.4 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Schauen wir uns einmal dieses System von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten an:

$$\begin{array}{ccccccc} 1\cdot x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & 1 \\ 2\cdot x_1 & + & 4\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & 2 \\ 2\cdot x_1 & - & 1\cdot x_2 & + & 1\cdot x_3 & = & 0 \end{array}$$

Indem wir dieses System als Matrix aufschreiben, sparen wir uns, wieder und wieder die Symbole x_1, x_2, x_3 zu schreiben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Dies ist die „erweiterte Koeffizientenmatrix", die das System beschreibt. „Erweitert" meint, dass wir die Lösungsspalte abgesetzt mit einem senkrechten Strich zu den Koeffizienten hinzugeschrieben haben.

Nun können wir mit unserer Matrix folgende Operationen durchführen, ohne die Lösungsmenge des Systems zu ändern:

I) Wir können eine Zeile mit einem Faktor multiplizieren.

II) Wir können Zeilen vertauschen.

III) Wir können ein Vielfaches einer Zeile zu einer Zeile addieren oder von ihr subtrahieren.

(Wenn wir uns die merken, welche Spalten wir vertauschen, geht das auch, aber da jede Spalte für eine Unbekannte steht, braucht man dafür eine gute „Buchhaltung", um dabei nicht durcheinanderzukommen und am Ende die Unbekannten zu verwechseln. Daher lasse ich die Spaltenvertauschung hier aus.)

Mit diesen Operationen können wir nun die Matrix soweit vereinfachen, dass wir die Lösung schließlich auf der rechten Seite ablesen können.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-2\cdot I \\ III-2\cdot I \end{array}$$

Zunächst wollen wir eine "1" in der ersten Zeile und ersten Spalte und eine „0“ in allen anderen Zeilen der ersten Spalte.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -2 \end{array}\right) \quad II \cdot (-1),\, II \Leftrightarrow III$$

Die zweite Zeile bedeutet schließlich $-1 \cdot x_3 = 0$, und daher haben wir sie lieber in der dritten Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - 2 \cdot III \\ II + 3 \cdot III \end{array}$$

Das Ergebnis für x_3 kennen wir nun schon. Es ist 0.

Wir addieren vielfache der 3. Zeile zu der 2. und 1. Zeile und bekommen so in der dritten Spalte auch „0“en.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) II \div (-5)$$

Jetzt können wir auch schon x_2 in der zweiten Spalte ablesen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad I - 2 \cdot II$$

Nach diesem letzten Schritt steht unsere Lösung nun ganz einfach in der Spalte ganz rechts:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Und zwar: $x_1=\frac{1}{5}, x_2=\frac{2}{5}, x_3=0$.

Links von der senkrechten Linie haben wir nun die spezielle Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und dadurch können wir rechts die Lösung ablesen:

$$\begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix – mit "1" in der "**Hauptdiagonalen**" und "0" überall sonst – ist so wichtig, dass sie an dieser Stelle einen Namen bekommt, es ist die „Einheitsmatrix“.

Es sieht so aus, als hätten wir ein Verfahren gefunden, um an eine eindeutige Lösung von linearen Gleichungssystemen zu kommen. Aber schauen wir uns ein zweites, ähnliches Beispiel an:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-2\cdot I \\ III-3\cdot I \end{array}$$

Wieder beschaffen wir uns die 0en in der ersten Spalte.....

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III-II \end{array}$$

Was ist das? Die zweite Zeile bedeutet $-1\cdot x_3=0$ und die dritte Zeile bedeutet $-1\cdot x_3=-3$!

Ist das möglich?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Spätestens hier sehen wir, dass das gar nicht geht.

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=-3$$

Wir haben hier also ein lineares Gleichungssystem, das überhaupt keine Lösung hat Und dass das auch passieren kann, müssen wir uns merken. Wenn solch ein Fall bei einer Ihrer Übungsaufgaben auftritt, schreiben Sie

$$L \quad = \quad \emptyset \quad \text{or} \quad L=\{\}$$

Hinweis: Ein lineares Gleichungssystem kann auch gar keine Lösung haben. Eine entsprechende Aufgabe hat dennoch eine Lösung, in diesem Fall schreibt man einfach auf, dass die Lösungsmenge leer ist.

Nun verändern wir das letzte Beispiel noch einmal etwas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-2\cdot I \\ III-3\cdot I \end{array}$$

In diesem Fall bekommen wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III-II \end{array}$$

hier sind die zweite und die dritte Zeile also völlig identisch. Wenn wir sie voneinander subtrahieren, bekommen wir diesmal

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und die dritte Zeile bedeutet nun

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3= \ 0$$

und das stimmt offensichtlich einfach immer. In diesem Fall haben wir unendlich viele Lösungen. Um die Lösungsmenge aufzuschreiben, können wir beispielsweise x_2 auswählen. (Genauso gut könnten wir in diesem Fall x_1 wählen, mit x_3 geht das aber nicht, da die zweite Zeile bedeutet:

$$-1 \cdot x_3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_3 = 0$$

und so ist der Wert vorgeschrieben und man kann da nichts mehr wählen. Wir wählen also x_2 und bekommen:

$$\begin{aligned} &x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 1 \\ &x_1 = 1 - 2 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 \quad (x_3 = 0) \\ &x_1 = 1 - 2 \cdot x_2 \end{aligned}$$

So haben wir eine Lösungsmenge, die von x_2 abhängt:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - 2 \cdot x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Hinweis: Ein lineares Gleichungssystem kann auch unendlich viele Lösungen haben. In diesem Fall wählen wir eine oder mehrere Unbekannte beliebig und schreiben auf, wie man die anderen Unbekannten aus den gewählten berechnet.

Ein letztes Beispiel verdeutlicht, was „eine oder mehrere“ bedeutet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - 2 \cdot I \\ III - 3 \cdot I \end{array}$$

wir bekommen also diesmal

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Da wir 2 Zeilen haben, die komplett aus 0en bestehen, wählen wir x_2 and x_3 :

$$L=\left\{ \begin{pmatrix} 1-2\cdot x_2-2\cdot x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

4.5 Was ist eine Matrix und was ein Vektor?

Unser oben beschriebenes Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen – das Gauß-Verfahren – führte uns zum Konzept der "Matrix". Eine Matrix ist ein Schema von Zahlen, die in Zeilen und Spalten angeordnet sind. Allgemein kann eine Matrix n Zeilen und m Spalten haben:

$$M_{n,m} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,m} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,m} \end{pmatrix}$$

Wir nennen sie in diesem Fall **(nXm)-matrix**. Die Matrizen, die wir gerade behandelt haben, sind also 3X3-matrices. Die Menge aller (nXm)-Matrizen nennen wir $\mathbb{R}^{nxm}$.

Vielleicht haben Sie in der Schule schon gelernt, mit „Vektoren" zu rechnen. **Vektoren** Sind ein Schema von Zahlen, das in einer Spalte angeordnet ist. Die Menge aller Vektoren mit n Komponenten können wir schreiben als

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

und wir nennen diese Menge das "n-fache cartesische Produkt" von $\mathbb{R}$ .In unseren Beispielen oben finden wir Vektoren auf der rechten Seite der senkrechten Linie in der erweiterten Matrix. Auch die Anzahl der Kunden der Supermarktfilialen war ein Vektor.Vektoren schreibt man oft mit einem kleinen Pfeil obendrüber.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Wir können sehen, dass die Vektoren gerade die Matrizen mit einer Spalte sind. Vektoren sind spezielle Matrizen. Das wird uns das Leben einfacher machen, wenn wir mit beiden zu rechnen lernen.

5 Rechnen mit Matrizen und Vektoren

Um dieses Skript übersichtlich zu halten, sind die meisten Beispiele der Rechnungen im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^{3x3}$ gemacht. Die Verfahren gehen aber natürlich auch allgemein für $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^{nxm}$.

5.1 Wie man Matrizen und Vektoren multipliziert

Nachdem wir nun Matrizen und Vektoren kennengelernt haben, lassen Sie uns das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 1\cdot x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & 1 \\ 2\cdot x_1 & + & 4\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & 2 \\ 2\cdot x_1 & - & 1\cdot x_2 & + & 1\cdot x_3 & = & 0 \end{array}$$

noch einmal anschauen. Die "ZeileXSpalte"-Multiplikation erlaubt uns, das System auch so aufzuschreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zur Erinnerung: Wir mulitplizieren die jeweiligen Zeilenelemente der Matrix mit den entsprechenden Spaltenelementen des Vektors und addieren die Produkte.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3$$

Diese Art der Multiplikation - definiet für zwei Vektoren – ist das "**Punktprodukt**" oder "**Skalarprodukt**" das Sie vielleicht von der Schule kennen.Wenn wir jede Zeile der Matrix als Vektor behandeln und diese Multiplikation ausführen, bekommen wir 3 "Skalare" (= reelle Zahlen) die wir wieder in einem Vektor anordnen können. Diese Art der Multiplikation ist exakt das, was wir bei den Übergangsmatrizen gemacht haben, um die Anzahl der Kunden der Folgewoche zu berechnen.

Wenn wir $\mathbb{R}^{nxm}$ betrachten: Was ist die Bedingung dafür, dass das überhaupt geht? Sie können sehen, dass die Anzahl der Elemente einer Zeile der Matrix gleich sein muss der Anzahl der Elemente in der Spalte des rechten Vektors.

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & .. & m_{1,m} \\ .. & .. & .. \\ m_{n,1} & .. & m_{n,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix}$$

Wenn n=m ist, was bedeutet, dass unsere Matrix Element von $\mathbb{R}^{nxn}$ ist, sagen wir, die Matrix ist „n-ter Ordnung".

5.2 Das Matrix-Produkt, die inverse Matrix

Bei einer Gleichung in $\mathbb{R}$: $a \cdot x = y$

bei der wir x ausrechnen wollen, können wir dies einfach mit dem Kehrwert von a tun: $x = a^{-1} \cdot y$

Wenn wir nun das Gleichungssystem - in $\mathbb{R}^3$ - :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

haben, wäre es doch schön, wenn wir dort auch so etwas wie einen Kehrwert der Matrix hätten. Wir müssten für unterschiedliche Werte $y_{1,} y_{2,} y_3$ das Gaußverfahren nicht immer wieder ausführen. Stattdessen könnten wir:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

umformen und müssten nur noch die Matrix mit dem Vektor multiplizieren, was viel weniger Arbeit wäre.Und die gute Nachricht ist: Genau das geht!

Dazu definieren wir zunächst eine M**atrix-Matrix-Multiplikation** – ganz einfach Zeile X Spalte, wie wir es bei den Vektoren schon gelernt haben:

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & .. & x_{1,m} \\ .. & .. & .. \\ x_{n,1} & .. & x_{n,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{1,1} & .. & y_{1,p} \\ .. & .. & .. \\ y_{m,1} & .. & y_{m,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{1,1} & .. & z_{1,p} \\ .. & .. & .. \\ z_{n,1} & .. & z_{n,p} \end{pmatrix}$$

wobei

$$z_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} x_{i,k} \cdot y_{k,j}$$

Wir erhalten das jeweilige Element der Ergebnis-Matrix, indem wir die entsprechende Zeile der linken Matrix mit der entsprechenden Spalte der rechten Matrix multiplizieren.Dazu muss natürlich wieder die Anzahl der Elemente der Zeilen der linken Matrix mit der Anzahl der Elemente der Spalten der rechten Matrix übereinstimmen.

Bevor wir uns auf die Suche nach einem Kehrwert von Matrizen machen, sollten wir wissen, was die „1“ bei den Matrizen ist (Welche Matrix ändert eine andere Matrix nicht, wenn man sie multipliziert?) Wir sehen sofort, dass das nur in $\mathbb{R}^{nxn}$ geht. Sonst würde sich durch die Multipllikation ja die Anzahl der Elemente bei der Ergebnis-Matrix geändert haben.

Die Antwort auf diese Frage im $\mathbb{R}^{nxm}$ ist die Einheitsmatrix – mit "1" in der Hauptdiagonalen und "0" überall sonst. Im $\mathbb{R}^{3x3}$ können wir leicht einsehen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} \end{pmatrix}$$

Das Symbol für diese Matrix ist $E_3 \in \mathbb{R}^{3x3}$ oder allgemein $E_n \in \mathbb{R}^{nxn}$. Sie spielt die Rolle der „1“ bei unserem neuen Rechenverfahren.

Hinweis: Für unsere neue Multiplikation gilt das **Assoziativgesetz**:

$$M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3) = (M_1 \cdot M_2) \cdot M_3$$

das wir von den reellen Zahlen schon kennen. Und auch das **Distributivgesetz**: gilt.

$$(M_1 + M_2) \cdot (M_3) = M_1 \cdot M_3 + M_2 \cdot M_3$$

wenn wir die Addition von 2 Matrizen einfach so durchführen, dass wir alle jeweiligen Komponenten addieren.

Das Kommutativgesetz gilt aber nicht! Ein Gegenbeispiel im $\mathbb{R}^{2x2}$ ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{but}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Nun schauen wir, ob bzw wann wir zu einer Matrix M eine Matrix finden für die gilt:

$$M^{-1} \cdot M = E_n \quad .$$

Wenn wir die hätten könnten wir rechnen:

$$M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix} \qquad | \quad M^{-1} \cdot \ldots \text{von links multiplizieren}$$

$$M^{-1} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = E_n \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix}$$

Die Antwort auf diese Frage ist nun: Wir bekommen sie, wenn wir das Gaußverfahren auf die folgende erweiterte Matrix anwenden:

$$(M \mid E_n) \rightarrow (E_n \mid M^{-1})$$

Wir schauen uns das an einem Beispiel an:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-I \\ III-I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III+3\cdot II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 0.5\cdot III \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1.5 & 0.5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-III \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1.5 & 0.5 \end{array}\right) \begin{array}{l} I-2\cdot II-2\cdot III \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1.5 & 0.5 \end{array}\right)$$

Lassen Sie uns prüfen, ob das wirklich geklappt hat:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -0.5 & -0.5 \\ -2 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun können wir Gleichungssystem mittels dieser inversen Matrix lösen, statt das aufwändige Gaußverfahren wieder und wieder machen zu müssen.

Und diese inverse Matrix ist auch die Antwort auf die Frage, wie wir an die Anzahl der Kunden der letzten Woche bei unserem Beispiel kommen, wenn wir die Anzahl in dieser Woche kennen.

Wenn T die Übergangmatrix ist und $\vec{c}$ der Kundenvektor dieser Woche, dann bekommen wir mit der Rechnung $T^{-1}\cdot\vec{c}$ den Kundenvektor der letzten Woche.

Hinweis: Als letztes definieren wir noch eine **Skalarmultiplikation für Matrizen** Komponente für Komponente, so dass wir schreiben können

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -0.5 & -0.5 \\ -2 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Auf diese Weise sind Matrizenrechnungen ohne Taschenrechner manchmal sehr viel einfacher aufzuschreiben.

Wie wir oben schon gesehen haben, führt das Gaußverfahren allerdings nicht immer zur Einheitsmatrix. Nun können wir sagen, dass Matrizen, bei denen wir eine Zeile komplett mit 0en bekommen, „nicht invertierbar" sind. Nun schauen wir uns noch einen „Schnelltest" an, mit dem wir entscheiden können, ob eine Matrix invertierbar ist oder nicht. Der Schnelltest ist die „Determinante".

5.3 Determinanten

Um unseren "Schnelltest" zu entwickeln, lassen Sie uns zunächst den $\mathbb{R}^{2x2}$ anschauen. Wir beginnen das Gaußverfahren mit einer abstrakten Matrix aus Symbolen. Das "a" soll dabei nicht 0 sein. Wenn es das wäre, könnten wir das mit einer Zeilenvertauschung schnell ändern. Wenn nämlich c auch noch 0 wäre, dann hätten wir eine Spalte, die nur aus 0en besteht und wüssten bereits, dass unsere Matrix nicht invertierbar ist. (Wir könnten x_1 frei wählen und hätten keine eindeutige Lösung beim Gauß-Verfahren):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \div a$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \quad II - c \cdot I$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & d - c \cdot b/a & -c/a & 1 \end{array}\right) \quad II - c \cdot I$$

Wir können nun sehen, dass unser Gauß-Verfahren mit einer 0-Zeile abbrechen würde, wenn

$$\begin{aligned} d \;-\; c \cdot \frac{b}{a} \;&=\; 0 \quad | \;\cdot a \\ \Leftrightarrow\; a \cdot d \;-\; c \cdot b \;&=\; 0 \end{aligned}$$

gilt. Wir können daher den Term auf der linken Seite der Gleichung als "**Determinante**" der Matrix definieren:

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$$

Wenn die Determinante 0 ist, haben wir keine oder unendlich viele Lösungen beim Gauß-Verfahren. Wenn die Determinante nicht 0 ist, haben wir eine eindeutige Lösung und unsere Matrix ist invertierbar.

Dieses Konzept können wir auf $\mathbb{R}^{nxn}$ erweitern:

5.3.1 Die Laplace-Entwicklung der Determinante

$$\text{Sei} \quad M = \begin{pmatrix} x_{1,1} & .. & x_{1,n} \\ .. & .. & .. \\ x_{n,1} & .. & x_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nxn} \quad \text{eine (nxn)-Matrix.}$$

Wenn wir von M die *i-te* Zeile und die *j-te* Spalte löschen, bekommen wir wieder eine Matrix $M_{i,j}$ der Ordnung (n -1). $M_{i,j}$ Sie heißt die *ij-th Streichmatrix von M*.

Um das zu verstehen, schauen wir uns das am Beispiel an:

$$M = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_{2,3} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_{2,2} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,3} \\ x_{3,1} & x_{3,3} \end{pmatrix}$$

So bekommen wir aus einer Matrix der Ordnung n, n^2 Matrizen der Ordnung n-1.

Nun können wir die Determinante einer Matrix definieren. Wir wählen dazu eine Zeile der Matrix aus. Sei i dies Zeile unserer (nxn)-matrix M. Dann ist

$$det(M) = |M| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot x_{i,j} \cdot |M_{i,j}|$$

Dasselbe können wir mit der j-ten Spalte unserer Matrix tun:

$$det(M) = |M| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot x_{i,j} \cdot |M_{i,j}|$$

Hinweis: Egal, welche Zeile oder Spalte wir für diese Rechnung wählen, wir bekommen für eine Matrix immer denselben Wert!

Die Formel und speziell das $(-1)^{i+j}$ sieht etwas kompliziert aus, aber es ist nicht so sehr schwer auszuführen. Es ist wie ein Schachbrettmuster von + and – auf unserer Matrix, mit einem + an der Position 1,1 (weil $(-1)^{1+1}=1$):

$$\begin{pmatrix} + & - & + & .. \\ - & + & - & .. \\ + & - & + & .. \\ .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

Mit dieser Definition der Determinanten gilt: Eine Matrix M der Ordnung n ist invertierbar und nur dann invertierbar, wenn $det(M) \neq 0$ gilt.

Um die Formel oben zu verstehen, ist es sicher eine gute Idee, sich das am Beispiel einer (3x3)-Matrix anzuschauen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \text{wir wählen die erste Spalte}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (3 \cdot 1 - (-1) \cdot 3) - 1 \cdot (2 \cdot 1 - (-1) \cdot 2) + 1 \cdot (2 \cdot 3 - 3 \cdot 2)$$

$$= (3 + 3) - (2 + 2) + (6 - 6)$$

$$= 2$$

Wir sehen - da 2 nicht 0 ist – dass unsere Matrix invertierbar ist.. (Wir haben Sie schon in unserem Beispiel oben invertiert).

Ein interessanter Aspekt dieser "Laplace-Entwicklung" ist, dass wir frei sind, welche Zeile oder Spalte wir zur Entwicklung wählen.Im Beispiel oben spielte es keine Rolle, welche Zeile oder Spalte wir wählen. Wenn wir uns aber diese Matrix anschauen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wenn wir hier die dritte Spalte wählen, sparen wir einiges an Rechenarbeit.Wegen der 0en in dieser Spalte reicht diesmal eine Unterdeterminante aus, da die anderen beiden ja mit 0 multipliziert werden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left(0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right) + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = -1$$

Hinweis:Bei der Berechnung von Determinanten spart es eine Menge Zeit und Arbeit, die Zeile oder Spalte mit der maximal möglichen Anzahl 0en zu wählen.

Ein weiterer Aspekt dieser Strategie: Wenn unsere Matrix in "**Dreiecksform**" ist, können wir die Determinante sehr schnell rechnen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

(Entwickeln Sie einfach nach der ersten Spalte...)

5.4 Cramers Regel

Wir können nun Determinanten berechnen und sie benutzen, um zu prüfen, ob lineare Gleichungssysteme eindeutig lösbar bzw. Matrizen invertierbar sind. Die Determinanten können aber auch noch etwas mehr: Mit ihnen kann man auch alternativ zum Gaußverfahren die Lösungen von linearen Gleichungssystemen berechnen. Dieses Verfahren heißt „Cramers Regel“.

Sei $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & .. & m_{1,n} \\ .. & .. & .. \\ m_{n,1} & .. & m_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nxn}$ eine (nxn)-matrix mit $det(M) \neq 0$.

Dann hat das Gleichungssystem

$M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix}$ eine eindeutige Lösung, die wir mit

$$x_j = \frac{1}{det(M)} \cdot det \begin{pmatrix} m_{1,1} & .. & m_{1,j-1} & y_1 & m_{1,j+1} & .. & m_{1,n} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ m_{n,1} & .. & m_{n,j-1} & y_n & m_{n,j+1} & .. & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

ausrechnen können. Wir können unser Gleichungssystem also lösen, indem wir (n+1) Determinanten berechnen: Wir ersetzen jeweils die j-te Spalte von M durch die Werte von **y** und bekommen den Wert x_j , indem wir die Determinante dieser Matrix durch die Determinante der Ausgangsmatrix M dividieren.

An unserem Beispiel oben wollen wir schauen, wie das geht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dass det(M) = 2 ist, wissen wir ja schon.(siehe oben).

Wir bekommen also unsere Lösung durch:

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (3 - (-1) \cdot 3) = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot (1 - 3) = -\frac{-2}{2} = 1$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (-1 - 3) = \frac{-4}{2} = -2$$

So haben wir nun also auch noch ein Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen, das nur auf Determinanten basiert.

5.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Das Konzept der Eigenwerte werden Sie an der Schule noch nicht kennengelernt haben. Einen Sonderfall lernen deutsche Schüler bei den Übergangsmatrizen.

5.5.1 Ein Beispiel

Die Kunden dreier Tankstellen A, B, C in einer Region werden sich bei ihrem nächste Besuch so aufteilen:

Kunden von A:	50% werden bei A tanken, 25% tanken bei B, 25% tanken bei C.
Kunden von B:	25% werden bei A tanken, 50% tanken bei B, 25% tanken bei C.
Kunden von C:	20% werden bei A tanken, 80% tanken bei C.

(Das Beispiel ist aus dem Schulbuch "Lambacher Schweizer"[3])

Wir schreiben die Situation als Matrix auf:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}^{next}$$

Wir haben also wieder eine Übergangsmatrix wie schon oben beschrieben. Der springende Punkt ist dieses Mal: Gibt es einen stabilen Zustand, bei dem die Verteilung der Kunden konstant bleibt? Das heißt, gibt es einen Kundenvektor $\vec{x}$, für den $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$ gilt? Einen solchen Vektor gibt es sicherlich: Der Vektor mit 0 an jeder Position – der $\vec{0}$. Der ist aber natürlich nicht sehr interessant. Wenn wir keine Kunden haben, brauchen wir unsere Tankstellen nicht offenhalten und es lohnt sich nicht, weiterzurechnen.

Lassen Sie uns schauen, wie man an einen solchen Vektor, der nicht der 0-Vektor ist, kommt:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad | \; -\vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad | \; \text{Die Einheitsmatrix ändert Vektoren nicht}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad | \; \mathit{Distributivgesetz}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5-1 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5-1 & 0.25 \\ 0.2 & 0 & 0.8-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Wir suchen also ein $\vec{x} \neq \vec{0}$, das diese Gleichung löst. Da $\vec{0}$ eine Lösung ist, können wir sicher sein, dass unser Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar ist. Wir können also einfach prüfen, ob die Determinante der Matrix 0 ist. Wenn nämlich $det(M - E_n) \neq 0$ wäre, wäre $\vec{0}$ die einzige Lösung.

$$det(..) = 0.2 \cdot \begin{vmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.5-1 & 0.25 \end{vmatrix} - 0.2 \cdot \begin{vmatrix} 0.5-1 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5-1 \end{vmatrix}$$

$$= 0.2 \cdot (0.0625 + 0.125) - 0.2 \cdot (0.25 - 0.0625)$$

$$= 0.2 \cdot 0.1875 - 0.2 \cdot 0.1875 = 0$$

Die Determinante ist 0, also können wir uns auf die Suche nach den Lösungen machen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0.5 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 0.25 & 0 \\ 0.2 & 0 & -0.2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III\cdot 5, vertauschen\, mit\; I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 0.25 & 0 \\ -0.5 & 0.25 & 0.25 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{II - 0.25 I} \\ III+0.5\cdot I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.25 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\cdot II \\ 4\cdot III \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III-II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III-II \end{array}$$

In diesem Fall können wir also x_3 frei wählen und erhalten:

$$L=\left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Wir können erkennen: Jede Verteilung, in der die 3 Tankstellen die gleiche Anzahl Kunden haben, wird stabil sein. Das führt uns zu einer neuen Definition: Der Wert 1 in der Gleichung

$$M\cdot\vec{x} \;=\; 1\cdot\vec{x}$$

heißt **Eigenwert** der Matrix. Jeder Vektor $\vec{x}\in L\setminus\{\vec{0}\}$ heißt **Eigenvektor**. Zum Beispiel ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein solcher Eigenvektor. Die Theorie der Eigenwerte und Eigenvektoren ist ein wichtiger Teilbereich der Matrizen. Neben anderem führt sie zu einem schnellen Verfahren, um höhere Potenzen von Matrizen M^p zu berechnen.

5.5.2 Eigenvektoren und Eigenwerte im allgemeinen

Wenn eine (nxn)-matrix M gegeben ist, ein Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ und eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, die die Gleichung

$$M \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

erfüllt, dann sagen wir, dass λ ein **Eigenwert** der Matrix M ist und $\vec{x}$ ist ein **Eigenvektor** der Matrix M zum Eigenwert λ .

Wie wir diese Werte berechnen können, haben wir oben gesehen:

Wir subtrahieren λ von allen Hauptdiagonalelementen der Matrix. Wir setzen dann die Determinante dieser neuen Matrix zu 0. Die 0-Stellen dieser Gleichung sind die Eigenwerte.

Um zu jedem Eigenwert die Eigenvektoren zu bekommen, erzeugen wir eine Matrix, indem wir von der Ausgangsmatrix in der Hauptdiagonale den jeweiligen Eigenwert abziehen.

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} m_{1,1}-\lambda & m_{1,2} & .. & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2}-\lambda & .. & m_{2,n} \\ .. & .. & .. & .. \\ m_{n,1} & m_{n,2}-\lambda & .. & m_{n,n}-\lambda \end{pmatrix}$$

Nun suchen wir mit den inzwischen bekannten Mitteln (Gauß-Verfahren) nach Vektoren $\vec{x} \neq \vec{0}$ die die Gleichung

$$M_\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

erfüllen.

Hier ein Beispiel des Verfahrens mit einer (3x3)-matrix:

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad | \quad \lambda \textit{ wird von der Hauptdiagonalen subtrahiert}$$

$$\begin{pmatrix} -7-\lambda & 0 & 6 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \quad | \quad \textit{Wir entwickeln die Determinante nach der } 2\text{ten } \textit{Zeile, und setzen sie zu } 0$$

$$(5-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -7-\lambda & 6 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)\cdot((-7-\lambda)\cdot(2-\lambda)-36)$$

$$= (5-\lambda)\cdot(\lambda^2-2\cdot\lambda+7\cdot\lambda-14-36)$$

$$= (5-\lambda)\cdot(\lambda^2+5\cdot\lambda-50) \quad | \quad \textit{z.B. mit pq}-\textit{Formel}$$

$$= (5-\lambda)\cdot(5-\lambda)\cdot(-10-\lambda)$$

Wir haben zwei Eigenwerte gefunden: $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = -10.$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert 5:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -12 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} I \div (-6) \\ \\ III \div 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir können $x_{2,} x_3$ frei wählen und bekommen $x_1 = \frac{1}{2}\cdot x_3$. Mögliche Eigenvektoren sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Nun die Eigenvektoren zum Eigenwert -10

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 12 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} I \div (3) \\ II \div 15 \\ III - 2 \cdot I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hier muss x_2 0 sein, um die 2. Gleichung zu erfüllen.. Wir können x_3 wählen und erhalten $x_1 = -2 \cdot x_3$. Ein Beispiel für einen Eigenvektor zum Eigenwert -10 ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit verlassen wir das Thema Matrizen und kommen nun zum anderen großen Bereich der Mathematik, der „Analysis“, in der es um „Funktionen“ geht und die uns zur Differential- und Integralrechnung führt.

6 Funktionen

6.1 Funktionen als ein Mittel, mathematische Probleme zu formulieren

Die Funktionen sind in der Mathematik eines der nützlichsten Konzepte. Mittels Funktionen und Gleichungen, die Funktionsterme enthalten, werden heute Zusammenhänge in der Natur, oder Gesetzmäßigkeiten des Verhaltens von Menschen, dargestellt. Mit den Kanonenkugeln, die in Parabeln fliegen, die mit quadratischen Funktionen beschrieben werden können, haben wir uns schon beschäftigt. Im wirtschaftlichen Zusammenhang führt die Beschäftigung mit Zins und Zinseszins zur Exponential- und Logarithmus-Funktion. So sind die Funktionen ein wichtiger Bestandteil der „mathematischen Sprache“ geworden und wir wollen deshalb mit ihnen möglichst vertraut werden.

Lassen Sie uns zunächst schauen, was eine **Funktion** ist:

6.1.1 Definition von Funktionen

X und Y seien Mengen. Eine **Zuordnung** oder Funktion von X (**Urbildmenge**) nach Y (**Bildmenge**) ordnet jedem Element von X ein – und genau ein - Element von Y zu. $x \in X$ heißt das **Argument** and $y \in Y$ der **Funktionswert** oder das **Bild** von x.

Schreibweisen:

$$f : X \to Y , \quad x \to y = f(x)$$

Die Menge aller Funktionswerte

$$f(X) = \{ \; f(x) \; | \; x \in X \; \}$$

heißt das **Bild von X unter f**.

Um eine Funktion zu beschreiben, ist es wichtig, für jedes $x \in X$ einen Funktionswert anzugeben. Eine oft benutzte Methode, dies zu tun, ist eine Gleichung. Zum Beispiel definieren:

$$f(x) = e^x , f(s) = e^s , f(t) = e^t , f(\mu) = e^\mu$$

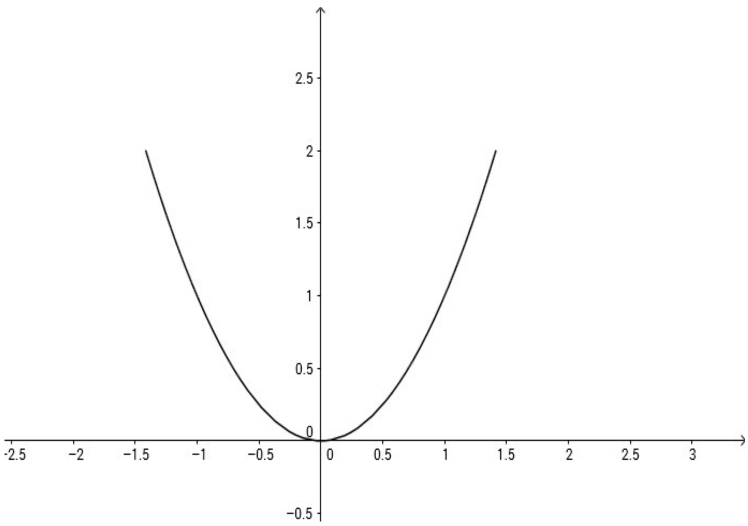
alle dieselbe Funktion f. Das Symbol - x , s , t , μ - ist dabei unerheblich und nur ein Name für das Argument.

6.1.2 Der Graph einer Funktion

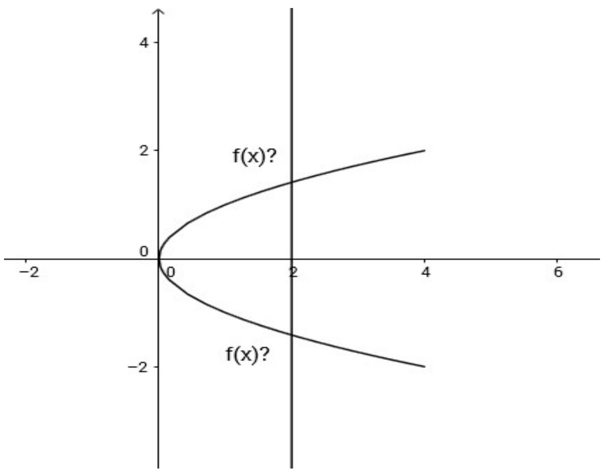
Im Fall von Funktionen reeller Zahlen - $f: D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$, ist der **Graph** von f die Menge der geordneten Paare

$$G_f = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ x \in D\ \wedge\ y = f(x)\ \}$$

Zum Beispiel können wir die Funktion $f: [-\sqrt{(2)}, \sqrt{(2)}] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ auf die folgende Weise visualisieren:



Lassen Sie uns nun den folgenden Graphen anschauen:



Beschrieben ist er durch die Gleichung $y^2=x,\ y \in [-2,2]$. Aber shen wir hier überhaupt das Bild einer Funktion? Nein, da wir in diesem Fall zwei Werte haben, die einem Wert auf der x-Achse zugeordnet sind. So liegen zum Beispiel $(2,\sqrt{2}),(2,-\sqrt{2})$ auf unserem Graphen, der Wert 2 ist also zwei Werten zugeordnet.
Den zweiten Graphen erhalten wir, wenn wir den von x^2 „invertieren". Dabei vertauschen wir die x- und die y-Achse so, dass die y-Achse nach rechts und die x-Achse nach oben zeigen. Wie Sie sehen können, erhalten wir, wenn wir eine Funktion invertieren, nicht immer auch wieder eine Funktion. Aber Sie kennen die Funktion $\sqrt{x}$ als Umkehrfunktion von x^2. Wie ist das möglich? Die Mathematiker warfen einfach 50% des Graphen (den Teil unter der x-Achse) weg und machten so die Zuordnung eindeutig.

6.2 Kombinationen von Funktionen

Funktionen werden oft mit Summen, Differenzen, Produkten oder Quotiernten verschiedener Ausdrücke beschrieben.Zum Beispiel können wir

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x), etc\ .$$

definieren. Sehr wichtig ist auch die **Verkettung von Funktionen**. Die bekommen wir, wenn wir den Funktionswert der einen Funktion als Argument der zweiten Funktion verwenden:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

Sie sehen, wir bestimmen zunächst g(x) und nehmen das Ergebnis als Argument von f.

Ein Beispiel: Seien $f(x)=2\cdot x+5$ und $g(x)=x^2-7$. Dann ist:

$$\begin{aligned}&(f\circ g)(x)\\ =\ &2\cdot(g(x))+5\\ =\ &2\cdot(x^2-7)+5\\ =\ &2\cdot x^2-9\end{aligned}$$

Die Verkettung in umgekehrter Reihenfolge kommt zu einem anderen Ergebnis:

$$\begin{aligned}&(g\circ f)(x)\\ =\ &(f(x))^2-7\\ =\ &(2\cdot x+5)^2-7\\ =\ &4\cdot x^2+20\cdot x+25-7\\ =\ &4\cdot x^2+20\cdot x+18\end{aligned}$$

6.3 Inverse- oder Umkehrfunktionen

Umkehrfunktionen sind essentiell, um Gleichungen zu lösen. Zum Beispiel haben wir schon gerechnet:

$$
\begin{aligned}
2^x &= 8 \qquad\qquad | \quad \log_2(\ldots) \\
x &= \log_2(8) = 3
\end{aligned}
$$

Jetzt, wo wir das Konzept der Verkettung von Funktionen zur Verfügung haben, können wir definieren:

Sei $f: X \to Y$ eine Funktion. Wenn wir dann eine Funktion $f^{-1}: f(X) \subset Y \to X$ finden, für die gilt:

$(f^{-1} \circ f)(x) = x$ für alle $x \in X$, dann nennen wir f^{-1} die **Umkehrfunktion** von f.

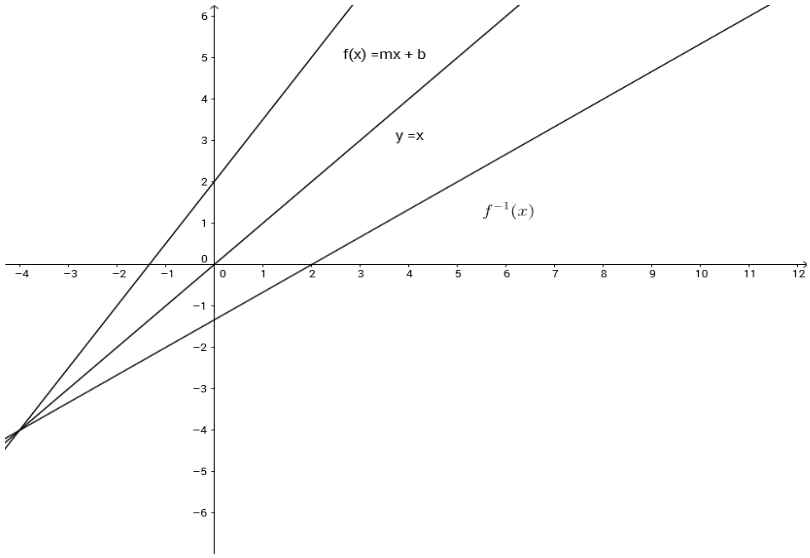
Hinweis: In dieser Schreibweise meint f^{-1} **nicht** den Kehrwert $\frac{1}{f(x)}$, das Symbol -1 ist in diesem Fall also kein Exponent!

6.3.1 Die Umkehrfunktion einer linearen Funktion

Sei $f(x) = m \cdot x + b, m \neq 0$ eine lineare Funktion. Dann erhalten wir die Umkehrfunktion, indem wir die Funktionsgleichung nach x umstellen:

$$
\begin{aligned}
y &= m \cdot x + b \quad | \; -b \\
y - b &= m \cdot x \quad | \; \div m \\
\frac{1}{m} \cdot y - \frac{1}{m} \cdot b &= x = f^{-1}(y)
\end{aligned}
$$

und wir erkennen: Die Umkehrfunktion einer linearen Funktion ist wieder eine lineare Funktion. Wenn wir die Graphen anschauen, stellt sich die Situation so dar:



Ein interessanter Aspekt der Sache: Wir erhalten die Umkehrfunktion, indem wir den Funktionsgraphen an der y=x-Geraden (Winkelhalbierenden) **spiegeln**. Dahinter steckt ein allgemeingültiges Prinzip:

Wenn eine Funktion f in einem Koordinatensystem gegeben ist, erhalten wir die Umkehrfunktion, indem wir den Graphen der Funktion an der Winkelhalbierenden spiegeln.

6.3.2 Exponentialfunktion und Logarithmus

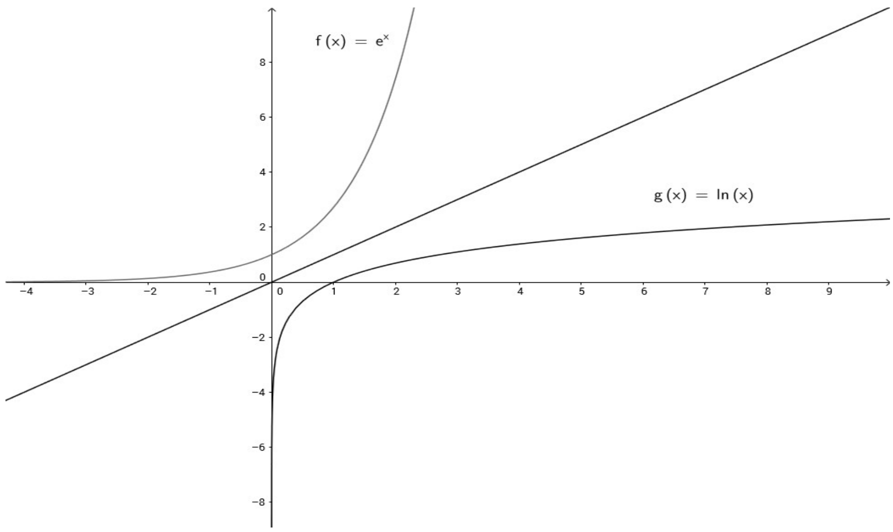
Die Exponentialfunktion beschreibt Wachstumsprozesse - in der Natur und in ökonomischen Zusammenhängen. Und auch manche Prozesse, bei denen sich etwas verringert – wie beim radioaktiven Zerfall oder beim Wertverlust des Geldes unter Inflation – werden durch diese Funktionen beschrieben.

Die **Logarithmusfunktion** ist die **Umkehrfunktion** der entsprechenden **Exponentialfunktion**:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln(x)$$
$$\ln(e^x) = e^{\ln(x)} = x$$

und, verallgemeinert:

$$f(x)=a^x \Rightarrow f^{-1}(x)=\log_a(x)$$
$$\log_a(a^x) = a^{\log_a(x)} = x$$



Wir schauen uns die **Definitionsbereiche** (Urbild- und Bildmengen) dieser Funktionen an:

$$a^x : \mathbb{R} \to (0,\infty) \quad , \quad \log_a(x) : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

- ***Was Inflation mit Exponentialfunktion und Logarithmus zu tun hat***

Inflation wird prozentual beschrieben. Wir haben zum Beispiel eine Inflationsrate von 3% pro Jahr. Was bedeutet das? Es bedeutet, dass, wenn wir in diesem Jahr für einen Geldbetrag eine bestimmte Menge Güter kaufen können, wir im nächsten Jahr 3% mehr Geld für dieselbe Menge Güter benötigen werden.

Wenn wir also in diesem Jahr 1.000€ für Güter ausgeben, werden wir im nächsten Jahr 1.030€ benötigen. Das bedeutet für den Wertverlust des Geldes: Wenn wir im nächsten Jahr 1.030€ statt 1.000€ benötigen, dann haben 1.000€ an Wert verloren. Und zwar können wir den Wertverlust so berechnen:

$$1.000 \cdot \frac{1}{1+0{,}03} \;=\; 970{,}87$$

Das ist ungefähr die Differenz $1.000 \cdot (1-0{,}03) = 970$, aber nicht ganz genau. Den genauen Wert bekommen wir, wenn wir einen Kehrwert berechnen, aber in Zeitungen finden wir oft eine Differenz stattdessen. Das macht bei einer Inflationsrate von 3% und einem Zeitraum von einem Jahr nur einen kleinen Unterschied aus, aber was passiert, wenn wir uns längere Zeiträume anschauen?

Hier haben wir zum Beispiel eine Beispielrechnung für 30 Jahre:

In 30 Jahren benötigen wir statt 1.000€:

$$1.000 \cdot 1{,}03^{30} = 1.000 \cdot (1+1{,}42726) = 2.426{,}26$$

Wir berechnen also den Wert von 1.000€ in 30 Jahren so:

$$1.000 \cdot \frac{1}{2{,}42726} = 411{,}99$$

Wenn wir hier stattdessen mit der Differenz $1.000 \cdot (1-1{,}42729)$ rechnen würden, käme ein negativer Wert heraus, was beim Geld nicht wirklich sinnvoll ist.

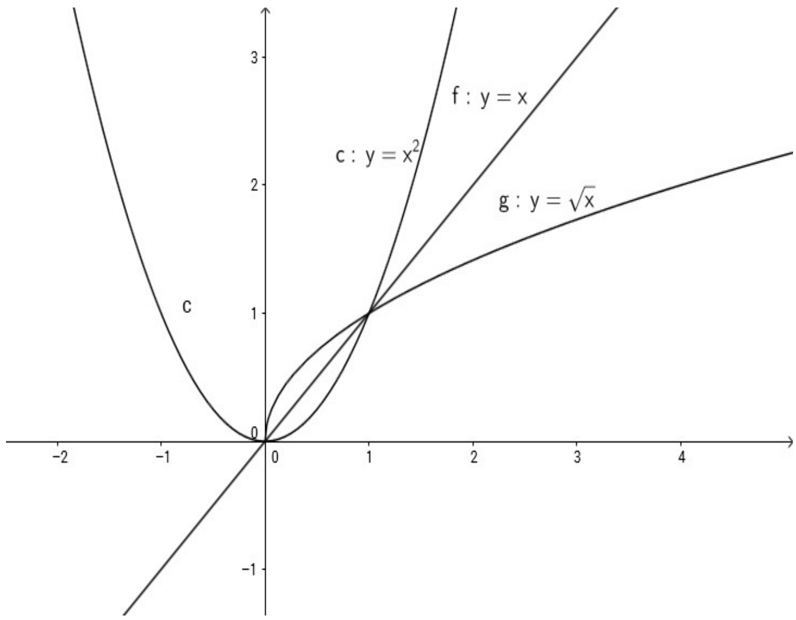
Wir merken uns also: Um den Wertverlust bei Inflation zu berechnen, benutzen wir die Formel $\frac{1}{1+p/100\%}$ **. Mit Differenzen zu rechnen führt bei langen Laufzeiten zu dramatisch falschen Ergebnissen!**

6.3.3 Quadrat- und Wurzelfunktion

Die **Wurzelfunktion** $\sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion der **Quadratfunktion** x^2. Es gilt also

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{x}^2 = x\text{, wenn } 0 \leqslant x$$

Graphisch stellt sich das so dar:

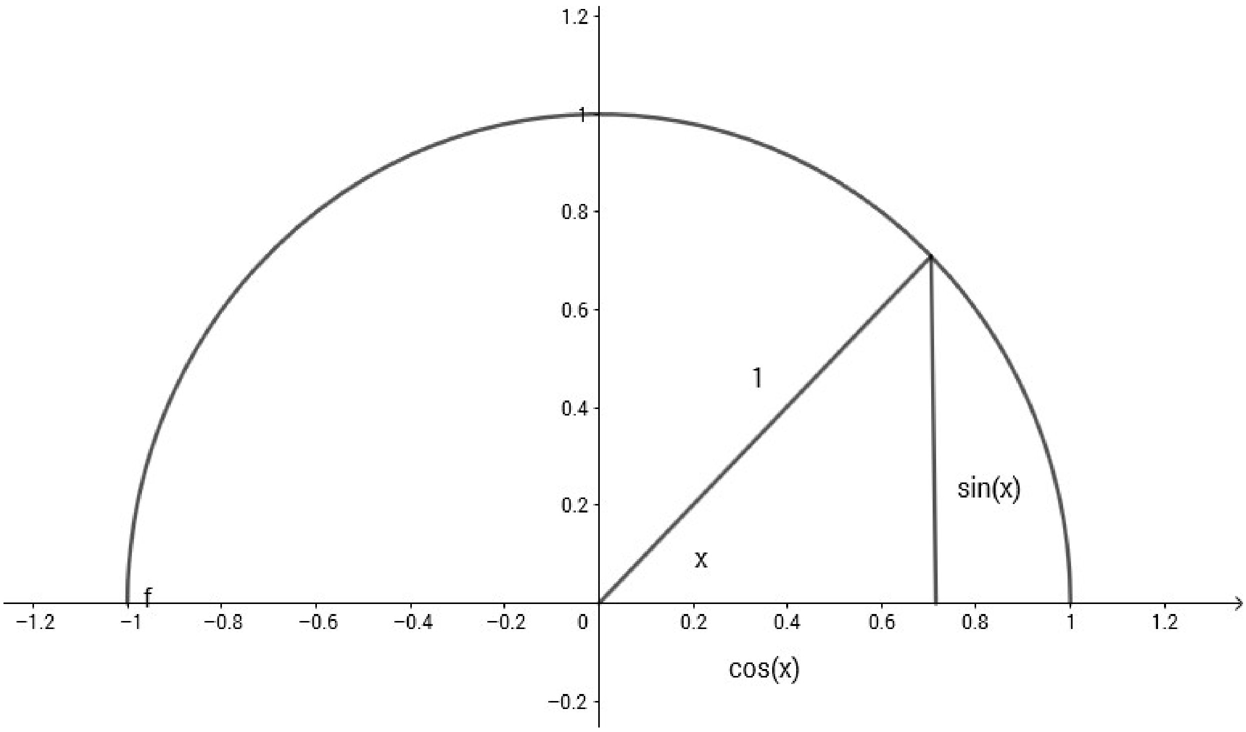


Wir wir schon gesehen haben, würden wir keine Funktion bekommen, wenn wir x^2 einfach an der Winkelhalbierenden spiegeln würden.Wir beschränken uns also auf die **positiven Wurzeln** und erhalten so die Bereiche:

$$x^2 : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) \quad , \quad \sqrt{x} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

6.4 Trigonometrische Funktionen

Der lateinische Name "trigonometrisch" bedeutet "Dreiecke messend" und genau das ist es, wofür diese Funktionen ins Leben kamen. Landvermesser brauchten sie, um aus gemessenen Winkeln die jeweils fehlenden Längen zu berechnen. Es wäre viel zu aufwändig gewesen, alle Längen zu messen, und manchmal auch, wenn z.B. ein Fluss zwischen zwei Punkten lag, unmöglich.



Wir definieren sie mit einem Winkel ϕ als Argument:

$$\sin(\phi)=\frac{Gegenkathete}{Hypothenuse} \quad \text{und} \quad \cos(\phi)=\frac{Ankathete}{Hypothenuse}$$

Mit diesen Funktionen können wir, wenn wir eine Länge und alle Winkel eines Dreiecks kennen, die fehlenden Längen berechnen. Wenn wir die Länge einer Kathete wissen möchten und die Länge der Hypothenuse nicht brauchen, ist zusätzlich nützlich:

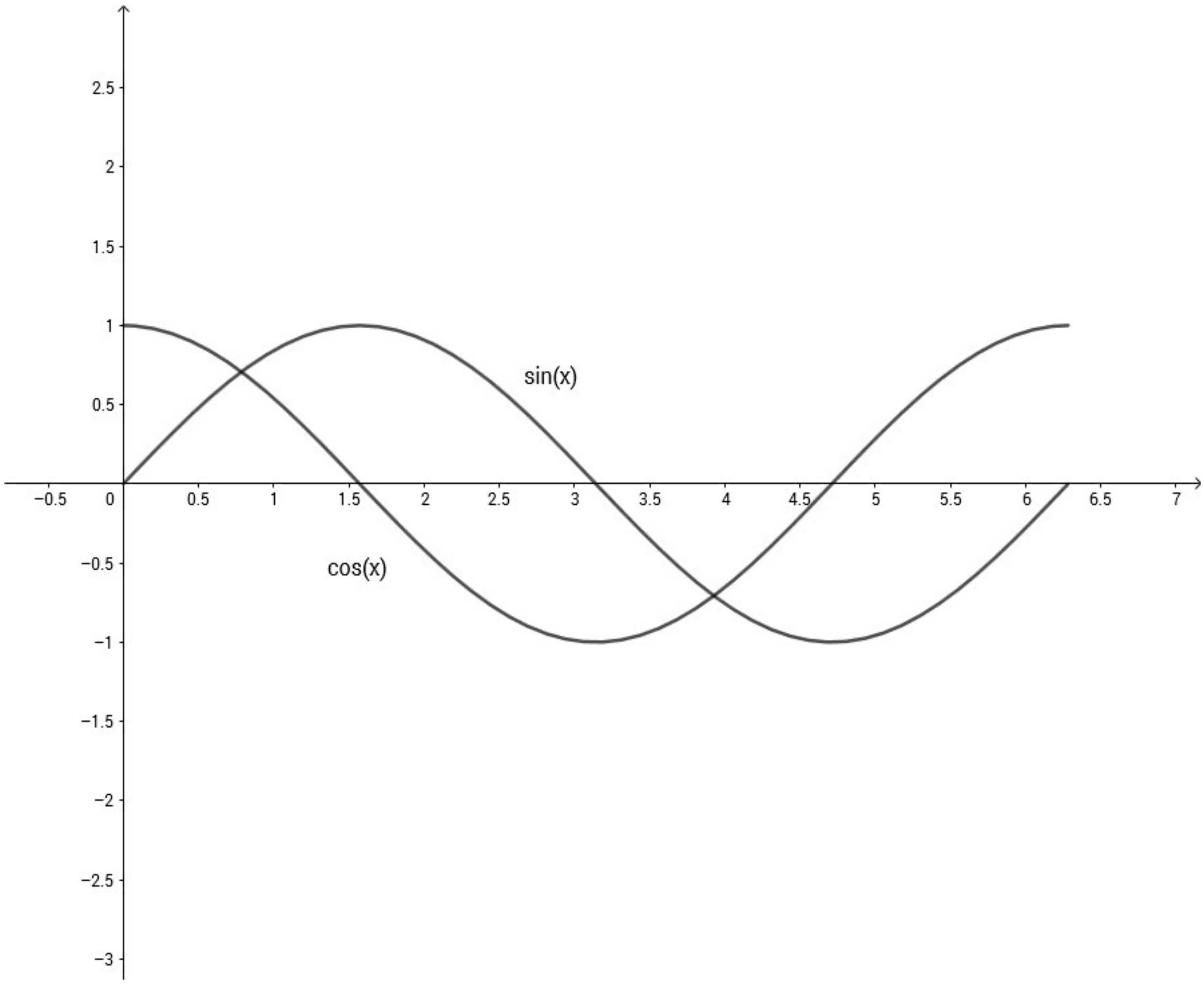
$$\tan(\phi)=\frac{Gegenkathete}{Ankathete}=\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} \quad \text{und} \quad \cot(\phi)=\frac{Ankathete}{Gegenkathete}=\frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}$$

Hinweis: Wir erinnern uns an den Satz des Pythagoras und bekommen so:

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

In unserer technischen Welt sind diese Funktionen wichtig geworden, um Vorgänge, die auf Schwingungen basieren, zu beschreiben. Ein Beispiel ist der Wechselstrom. Im Bereich der Wirtschaft können wir z.B. periodisch schwankende Preise („Schweinezyklus“) mit Ihnen beschreiben.

Schauen wir uns die Funktionen in einem Koordinatensystem an:



In der Schule haben wir zwei Arten kennengelernt, Winkel zu beschreiben. Die erste definiert einen vollen Kreis als $360°$ und einen rechten Winkel entsprechend als $90°$. Das **Gradmaß** ist eine sehr alte Methode, Winkel zu messen, und sie arbeitet wunderbar, solange wir nicht mit Differentialrechnung zu tun haben. Sinus und Cosinus mit Winkeln im

Gradmaß kann man aber nicht so gut ableiten und das ist der Grund, warum Sie noch eine weitere Methode kennenlernten, Winkel zu messen. Beim **Bogenmaß** ist ein voller Kreis $2\cdot\pi$ und ein rechter Winkel ist entsprechend $\frac{\pi}{2}$. Da es diese beiden Wege, Winkel zu messen, nun einmal gibt, brauchen wir jeweils eine präzise Vorstellung, wie unsere Winkel jeweils gemessen werden. Im Taschenrechner heiß das Gradmaß DEG(ree) und das Bogenmaß RAD(iant).

Die sinus- und cosinus-Funktionen werden an der Universität oft in der Differential- und Integralrechnung verwendet, und dafür sollten wir mit dem Bogenmaß vertraut sein.

Um sich die wichtigsten Werte (Dies ist besonders wichtig, wenn Sie eine Klausur ohne Taschenrechner schreiben!) merken zu können, schauen Sie auf diese Tabelle:

Gradmaß	Bogenmaß	sin(x)	cos(x)	tan(x)	cot(x)
$0°$	0	0	1	0	Nicht definiert
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Nicht definiert	0

Das sind viele Werte, aber sie haben ein einfaches Bildungsgesetz: Wenn Sie sich die Sinus-Spalte anschauen, können Sie erkennen, dass $\frac{\sqrt{0}}{2}=0, \frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}=1$, wir haben also eine recht einfache Folge, bei der wir immer wieder eine Wurzel bilden und durch 2 teilen. In der Cosinus-Spalte finden Sie exakt die gleichen Werte wie in der Sinus-Spalte – **aber in umgekehrter Reihenfolge**. Die Werte der Tangens- und Cotangens-Spalte erhalten Sie, indem Sie einfach die entsprechenden Werte der Sinus- und Cosinus-Spalte dividieren.

Mit dieser Tabelle im Hinterkopf – oder auf einem Blatt Papier vor uns – können wir nun Gleichungen mit diesen Funktionen lösen:

$\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ führt uns zu:

$x=\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$ oder - wegen der Symmetrie der Funktion $x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$

Hinweis: Trigonometrische Gleichungen haben in der Regel zwei Lösungen im Intervall $[0,2\pi]$! Der Taschenrechner gibt uns davon nur eine, und die Hauptaufgabe beim Lösen einer solchen Gleichung besteht darin, die zweite zu bestimmen!

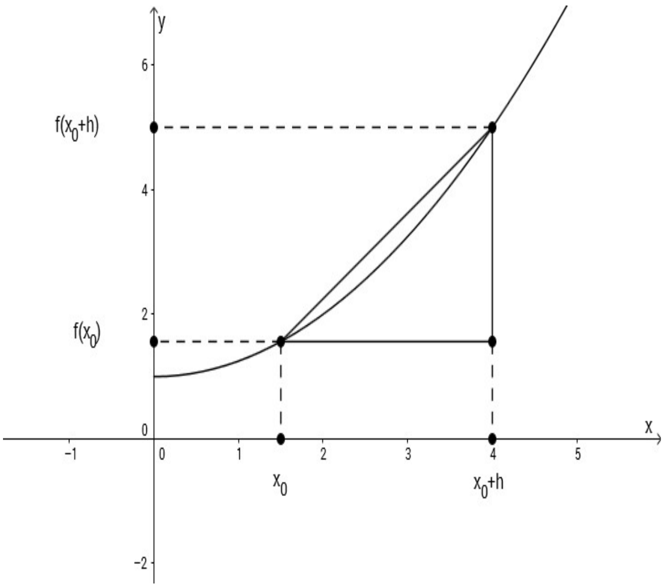
7 Ableitung – die Differentialrechnung

7.1 Einführung: Wie stark ändert sich ein Parameter?

Die Differentialrechnung wurde von G.W. Leibniz (1646 - 1716) und I. Newton (1643 – 1727) parallel entwickelt. Leibniz arbeitete am "Tangentenproblem" – Wie können wir Steigung und y-Abschnitt einer Tangente an einen vorgegebenen Funktionsgraphen bestimmen? - und Newton beschäftigte sich damit, wie man die Geschwindigkeit eines Körpers bestimmen kann, wenn man die Kraft kennt, die auf ihn wirkt.

Bei diesem Konzept geht es darum, die Änderungsrate einer vorgegebenen Funktion zu bestimmen. Es hat sich als sehr mächtig erwiesen, nicht nur im ursrprünglichen, physikalischen Kontext, sondern mittlerweile auch in der Ökonomie, speziell der Volkswirtschaftslehre und Operations Research.

Es basiert auf der Idee der **Grenzwerte**.



Um die Änderung oder Steigung einer vorgegebenen, möglichst beliebigen Funktion - den **Gradienten** – zu bestimmen, beginnen wir damit, uns die Situation bei einer einfachen Funktion, die wir bereits kennen, anzuschauen: Der Gerade. Die Steigung von $y=m\cdot x+b$ ist einfach m, das können wir ablesen! Wenn wir nun die Steigung einer beliebigen Funktion f an einem Punkt x_0 bestimmen möchten, können wir einen zweiten Punkt in der Nähe auswählen - etwa x_0+h - und wir können unsere Steigung näherungsweise berechnen:

$$\Delta f = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Natürlich ist Δf nicht exakt die Steigung am Punkt x_0 , aber wenn wir h sehr klein wählen, wird die Abweichung der Steigung von unserem Wert auch sehr klein werden. Leider können wir h = 0 nicht wählen, weil in diesem Fall:

$$\Delta f = \frac{f(x_0+0)-f(x_0)}{h} = \frac{0}{0}$$

herauskommen würde. Und bekannterweise haben wir keine sinnvolle Definition von $\frac{0}{0}$.

Mit der Idee des „**Grenzwerts**“ können wir dieses Problem aber lösen. Wir definieren:

$$f' = \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

und nennen diesen Term die Ableitung von f am Punkt x. Lassen Sie uns nun dieses Konzept am Beispiel $f(x)=x^2$ anschauen:

$$\begin{aligned} f' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2\cdot x\cdot h+h^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\cdot x\cdot h+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2\cdot x+h = 2\cdot x \end{aligned}$$

Weil wir in diesem Fall den Nenner kürzen konnten, konnten wir h einfach =0 setzen und so können wir den oben definierten Grenzwert für f bestimmen.

Die war nun eine Bestimmung einer Ableitung „from scratch“ - von der Definition des Grenzwertes her. Es ist wichtig, dass wir immer im Hinterkopf behalten, was wir tun, wenn wir eine Ableitung bestimmen – es geht um eine Steigung -, aber im folgenden Abschnitt werden wir eine ganze Reihe Regeln kennenlernen, die genau dieses – sehr aufwändige – Verfahren vermeiden und und so viel Arbeit sparen.

7.2 Ableitungsregeln

Die Differentialrechnung enthält viel Tabellenwissen. Sehr oft benutzen wir keine Grenzwerte, um eine Ableitung zu berechnen und haben stattdessen diese Regeln im Hinterkopf – oder, solange wir damit noch nicht so vertraut sind, schauen wir auf eine solche Tabelle mit Ableitungsregeln. Einige dieser Regeln haben Namen – wie die Kettenregel – und einige sind namenlos, aber nichtsdestotrotz sind die namenlosen Regeln genau so wichtig wie die anderen. Sie haben die Ableitungsregeln vermutlich schon in der Schule gelernt. Hier daher eine Wiederholung:

Funktion	Ableitung	Name der Regel
x^a	$a \cdot x^{a-1}$	-
e^x	e^x	-
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	-
$\sin(x)$	$\cos(x)$	-
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	-
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$	Summenregel
$\alpha \cdot f(x)$	$\alpha \cdot f'(x)$	Faktorregel
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x)+f(x) \cdot g'(x)$	Produktregel
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x)-f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$	Quotientenregel
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$	Kettenregel

Mithilfe dieser Regeln können wir alle Ableitungen bestimmen, die wir so brauchen. Die erste Regel $x^a \rightarrow a \cdot x^{a-1}$ ist dabei nicht nur wichtig, um Polynome abzuleiten. Sie gilt auch für negative Exponenten und Brüche (und der Exponent a darf dabei sogar eine beliebige reelle Zahl sein).

So können wir mit dieser Regel auch die Wurzelfunktion ableiten:

$$
\begin{aligned}
& \left(\sqrt{(x)}\right)' \\
=\ & \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' \\
=\ & \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} \\
=\ & \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} \\
=\ & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \\
=\ & \frac{1}{2\cdot\sqrt{(x)}}
\end{aligned}
$$

Diese spezielle Ableitungsregel für die Wurzelfunktion müssen Sie nicht unbedingt kennen. Sie können sie ja, wie hier gezeigt, herleiten. Sie wird aber so oft benötigt, dass Sie einfach schneller sind, wenn Sie sich diese Regel gemerkt haben.

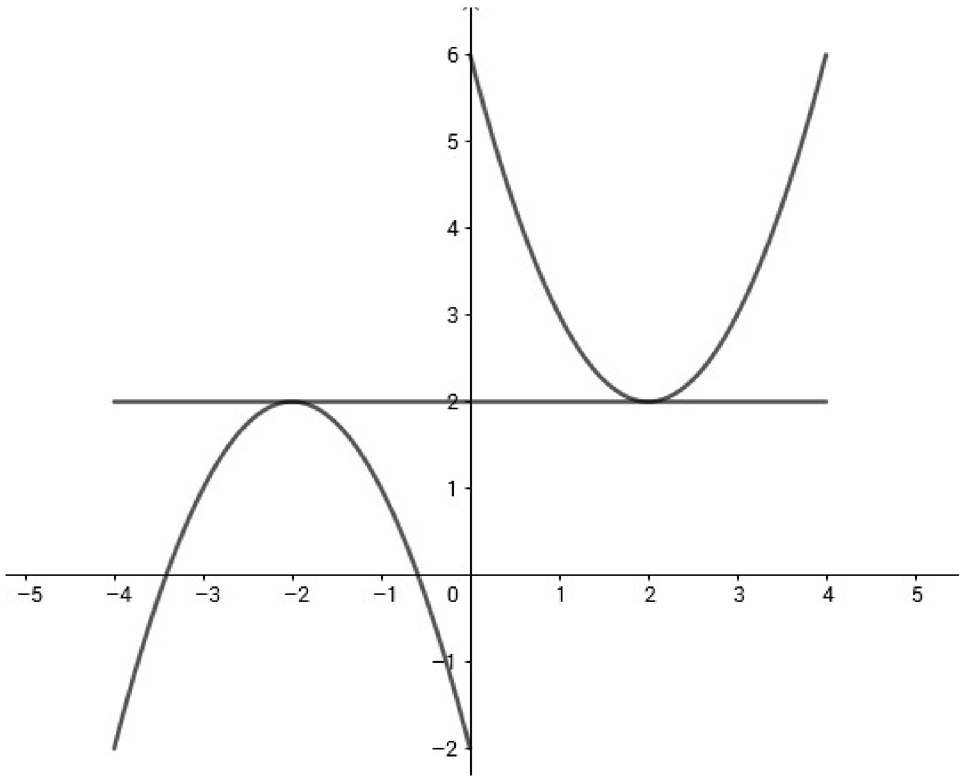
Die „Kunst“ der Ableitung ist nun, diese Regeln geeignet auf vorgegebene Funktionen anzuwenden. Einige Beispiele:

$\left(e^{(x^2)}\right)'$ $= \left(e^{(x^2)}\right)\cdot 2\mathrm{x}$ (Kettenregel, Ableitung von e^x und x^2)	$\left(\cos\left(x^2+2\mathrm{x}\right)\right)'$ $= -\sin\left(x^2+2\mathrm{x}\right)\cdot\left(2\mathrm{x}+2\right)$ (Kettenregel, Summenregel, Ableitung von $\sin(x)$ und $x^2+2\mathrm{x}$)
$\left(e^x\cdot\left(x^2+2\mathrm{x}\right)\right)'$ $= e^x\cdot\left(x^2+2\mathrm{x}\right)+e^x\cdot\left(2\mathrm{x}+2\right)$ (Produktregel, Ableitung von e^x und $x^2+2\mathrm{x}$)	$\left(\sin\left(3\mathrm{x}\right)\cdot\left(x^2+2\mathrm{x}\right)\right)'$ $= 3\cos\left(3\mathrm{x}\right)\cdot\left(x^2+2\mathrm{x}\right)+\sin\left(3\mathrm{x}\right)\cdot\left(2\mathrm{x}+2\right)$ (Produkt- und Kettenregel, Ableitung von e^x, sin(x) und $x^2+2\mathrm{x}$)

7.3 *Extremwerte und Skizzen von Funktionen*

Mit der Differentialrechnung können wir Extremwerte von Funktionen bestimmen. Wir können Punkte x finden, bei denen der Wert von f(x) besonders hoch oder niedrig ist. Das ist natürlich eine wertvolle Information, wenn unsere Funktion zum Beispiel Kosten oder Gewinn beschreibt.

Wie geht das nun, wenn man die Steigungsfunktion einer Funktion kennt? Wir sehen als erstes, dass sich eine Funktion an ihren Extremstellen NICHT ÄNDERT. Sie steigt nicht und sie fällt auch nicht.



So ist die Steigung an solchen Punkten also 0. Daher können wir

eine Funktion ableiten und

die Nullstellen der Ableitungsfunktion bestimmen

und bekommen so "Kandidaten" für ein Maximum oder Minimum.

Oben sind die Funktionen

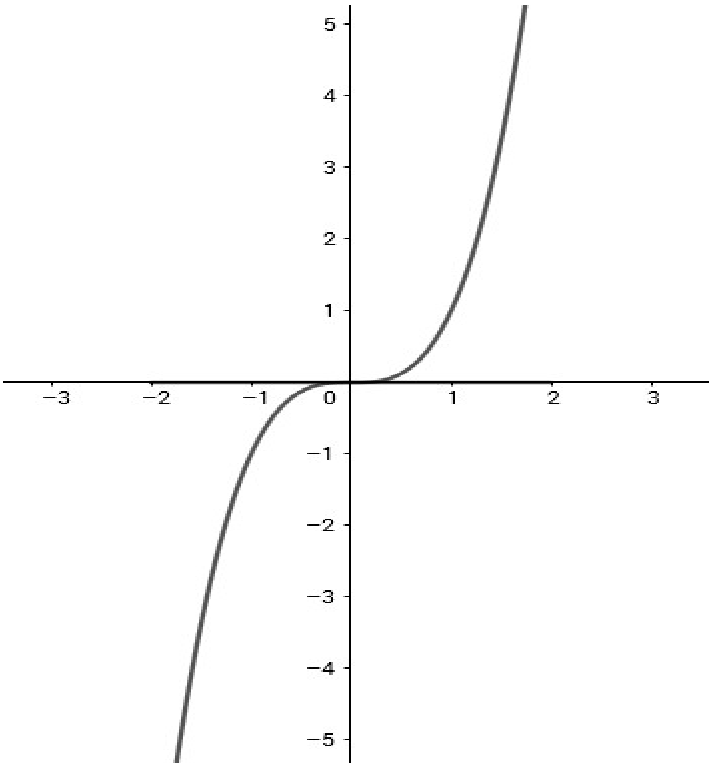
$f(x)=x^2-4x+6$ $f'(x)=2x-4=0$ $x=2$	$f(x)=-x^2-4x-2$ $f'(x)=-2x-4=0$ $x=-2$

Skizziert.

Bei diesen beiden Beispielen hat die Bestimmung der Extremwerte wunderbar funktioniert. Wir können aber nicht in jedem Fall sicher sein. Ein bekanntes Gegenbeispiel ist die Funktion $f(x)=x^3$: Würden wir rechnen:

$$f(x)=x^3$$
$$f'(x)=3x^2=0$$
$$x=0$$

hätten wir ein „Extremum“, das gar keines ist, wie wir an der Skizze leicht sehen können:



Diese Art Punkte nennen die Mathematiker „Sattelpunkte“. So stellt sich die Frage: Wie können wir zwischen Extremwerten und Sattelpunkten unterscheiden und wie können wir erkennen, ob ein Extremum ein Maximum oder ein Minimum ist?

7.4 Ableitungen höherer Ordnung, Krümmung, Wendepunkte

Schauen Sie sich für den Unterschied zwischen Minimum und Maximum die Skizze oben noch einmal an. Wir sehen, bei einem Maximum ist die Funktion rechtsgekrümmt,bei einem Minimum ist sie linksgekrümmt. Das bedeutet: Links vom Maximum steigt die Funktion, und die Ableitung ist daher positiv, rechts vom Maximum fällt sie, die Ableitung ist also negativ. Bei einem Minimum ist es genau umgekehrt. Daher gilt:

1. An einem Maximum fällt die Ableitung einer Funktion.
2. An einem Minimum steigt die Ableitung einer Funktion.

So kommen wir dazu, „höhere Ableitungen“ zu bilden: Mit der zweiten Ableitung können wir zwischen Minimum und Maximum unterscheiden:

$f(x)=x^2-4\mathrm{x}+6$ $f'(x)=2\mathrm{x}-4=0$ $x=2$ $f''(x)=2$ $f''(2)=2>0 \Rightarrow \text{minimum}$	$f(x)=-x^2-4\mathrm{x}-2$ $f'(x)=-2\mathrm{x}-4=0$ $x=-2$ $f''(x)=-2$ $f''(-2)=-2<0 \Rightarrow \text{maximum}$

Und so haben wir ein erstes, vollständiges "Kochbuch" um Extremwerte zu bestimmen.Wenn an einer Nullstelle der ersten Ableitung die zweite Ableitung >0 ist, sind wir sicher, es mit einem Minimum zu tun zu haben und wenn an der Nullstelle die zweite Ableitung < 0 ist, dann haben wir es ganz sicher mit einem Maximum zu tun.

Allerdings hat unser Kochrezept eine Ausnahme: Wenn die zweite Ableitung ebenfalls = 0, ist, wissen wir gar nichts sicher. Es könnte ein Sattelpunkt sein, aber es könnte auch ein Extremwert sein. Wir können uns das an der Funktion $f(x)=x^4$ schnell klarmachen. In den meisten Fällen funktioniert dieses Rezept aber und ist daher an deutschen Schulen sehr beliebt.

Ein anderer Ansatz für eine Entscheidung zwischen Extremum oder Sattelpunkt ist es, das Vorzeichen der ersten Ableitung zu Rate zu ziehen. Wenn wir nämlich ein Maximum haben, dann steigt die Funktion links davon und fällt rechts. Die erste Ableitung ist also links > 0 und rechts < 0. Bei einem Minimum ist es genau umgekehrt. In beiden Fällen wechselt also das Vorzeichen:

Maximum	Minimum
$f(x)$steigend$\rightarrow$fallend $f'(x)>0\rightarrow<0$	$f(x)$fallend$\rightarrow$steigend $f'(x)<0\rightarrow>0$

Und so können wir prüfen, ob wir ein Minimum oder Maximum vor uns haben, indem wir zwei Punkte links und rechts von unserem Kandidaten beliebig wählen und schauen, was die Vorzeichen machen:

$f(x)=x^2-4x+6$ $f'(x)=2x-4=0$ $x=2$ $f'(1)=-2<0$ $f'(3)=2>0\Rightarrow$ minimum	$f(x)=-x^2-4x-2$ $f'(x)=-2x-4=0$ $x=-2$ $f'(-3)=2>0$ $f''(-1)=-2<0\Rightarrow$ maximum

Mit diesem Ansatz vermeiden wir das Problem, das bei $f'=0$ und $f''=0$ auftritt. Wir haben ganz einfach einen Sattepunkt vor uns, wenn sich das Vorzeichen der ersten Ableitung NICHT ändert, unabhängig davon, ob es $<0\rightarrow<0$ oder $>0\rightarrow>0$ ist. Aber **VORSICHT**: Vielleicht hat unsere Funktion auch eine Definitionslücke (wie etwa die 0 eine Definitionslücke von $\frac{1}{x}$ ist). Unsere willkürlich ausgewählten Punkte müssen in diesem Fall näher am zu untersuchenden Punkt sein als diese Definitionslücken. So vermeiden wir, eine zweite Ableitung zu bestimmen, wir müssen aber die Definitionslücken unserer Funktion kennen. Dafür vermeiden wir den Fall, bei dem wir mit dem anderen Ansatz zu keiner Entscheidung kommen.

Welcher Ansatz ist nun besser? Die Antwort auf diese Frage hängt von f ab und auch von Ihrer Übung im Ableiten.

7.5 Wendepunkte

Ein weiterer wichtiger Aspekt der Differentialrechnung sind die „Wendepunkte“.Wenn wir uns den Graphen von $f(x)=x^3$ anschauen, sehen wir, dass die Funktion links von der 0 rechtsgekrümmt ist und dass sie rechts von der 0 linksgekrümmt ist. Ihr Krümmungsverhalten ändert sich also am 0-Punkt. Solche Punkte einer Funktion, an denen sich das Krümmungsverhalten ändert, nennen wir **Wendepunkte**. Wir können sie bestimmen, indem wir eine vorgegebene Funktion ableiten und dann die lokalen Extremwerte der ersten Ableitung bestimmen. Ein Beispiel einer solchen Berechnung:

$f(x)=x^3-6x^2+12x$
$g(x)=f'(x)=3x^2-12x+12$ nun schauen wir nach Extremwerten dieser Funktion
$g'(x)=f''(x)=6x-12=0$
$x=2\; g''(x)=f'''(x)=6$
$g''(2)=f'''(2)=6>0$
g=f' hat ein Minimum bei x=2
2 ist ein Wendepunkt von f

Wendepunkte sind im ökonomischen Kontext wichtig, um vorherzusagen, wie sich eine Funktion der Zeit in Zukunft verhalten wird. Wenn wir zum Beispiel eine fallende Gewinnfunktion haben, die rechtsgekrümmt ist, dann wird in Zukunft der Verlust immer größer werden. Wenn wir aber eine fallende Gewinnfunktion linksgekrümmt ist, wird sie vielleicht bald ihr Minimum erreichen.

8 Differentialrechnung rückwärts – die Integralrechnung

8.1 Von der Änderung auf die Funktion selbst schließen

Nun können wir also den Gradienten – die Funktion, die beschreibt, wie sich eine Funktion ändert – für eine vorgegebene Funktion bestimmen. Oft sind Probleme aber als Gleichungen formuliert. Erinnern Sie sich? Als wir Exponentialgleichungen lösen wollten, brauchten wir die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion – den Logarithmus. Als wir Gleichungen mit Multiplikationen lösen wollten, brauchten wir die Division. Und heute sind viele wissenschaftliche Probleme in Form von Differentialgleichungen formuliert, die es zu lösen gilt. Stellen Sie sich vor, Sie kennen die Beschleunigung eines Satelliten und möchten wissen, wo er zu einem gegebenen Zeitpunkt ist. In der Physik gibt es dazu eine grundlegende Theorie, die Newton'schen Bewegungsgesetze. Sie beschreiben den Zusammenhang zwischen der Position **s** eines Objekts, seiner Geschwindigkeit **v** und seiner Beschleunigung **a**:

$$v=\frac{ds}{dt}, \qquad a=\frac{dv}{dt}$$

Dabei meinen $\frac{ds}{dt}, \frac{dv}{dt}$ die jeweiligen Differentialquotienten. Dies ist die sogenannte „Leibniz-Schreibweise“ der Ableitung, die etwas umständlich erscheinen mag, aber in der Integralrechnung ihre Vorteile hat.

Diese zwei Gleichungen, die einen Zusammenhang von einer Funktion und ihren Ableitungen beschreiben, werden Differentialgleichungen genannt. Auch in der Ökonomie – speziell der Volkswirtschaftslehre – spielen Differentialgleichungen eine Rolle. Wie man Differentialgleichungen löst, werden wir in diesem Kurs nicht behandeln, aber die Grundlage der Differentialgleichungen, die Integralrechnung, wollen wir uns nun anschauen.

Es geht also darum, aus einer Ableitung – z.B. der Geschwindigkeit eines Objekts – die Funktion, deren Ableitung sie ist – in unserem Beispiel die Position -, zu rekonstruieren.

Dazu zunächst einige Schreibweisen:

$a=\frac{dv}{dt}$ $dv=a\cdot dt$ Wir schreiben: $v(t)=\int a(t)dt$	und, analog	$v=\frac{ds}{dt}$ $ds=v\cdot dt$ Wir schreiben: $s(t)=\int v(t)dt$

Wenn wir das Symbol t für die Zeit durch das allgemeine Symbol x ersetzen, wie es so oft in der Mathematik getan wird, dann ist $\int f(x)dx$ das Integral der vorgegebenen Funktion f(x). Oft wird es auch **Stammfunktion** genannt und als Symbol wird das große F verwendet.

Einige Integrale können wir sehr einfach bestimmen, da das Integral der Umkehr-Operator der Ableitung ist:

$(x^n)'=nx^{(n-1)}$	$\int nx^{(n-1)}dx=x^n$
$(e^x)'=e^x$	$\int e^x dx=e^x$
$(\ln(x))'=\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx=\ln(x)$
$(\sin(x))'=\cos(x)$	$\int \cos(x)dx=\sin(x)$
$(\cos(x))'=-\sin(x)$	$\int -\sin(x)dx=\cos(x)$

Die Summenregel und Faktorregel läßt sich ebenfalls direkt aus der Differentialrechnung übertragen:

$(c\cdot f)'=c\cdot f'$	$\int c\cdot f\,dx=c\cdot\int f\,dx$
$(f+g)'=f'+g'$	$\int (f+g)dx=\int f\,dx+\int g\,dx$

Einige dieser Regeln formulieren wir etwas um, damit sie handlicher in der Anwendung sind:

Regel aus der Differentialrechnung	Wird umformuliert
$\int nx^{(n-1)}dx=x^n$	$\int x^{(n-1)}dx=\frac{1}{n}x^n$ $\Rightarrow\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$\int -\sin(x)\,dx = \cos(x)$	$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$

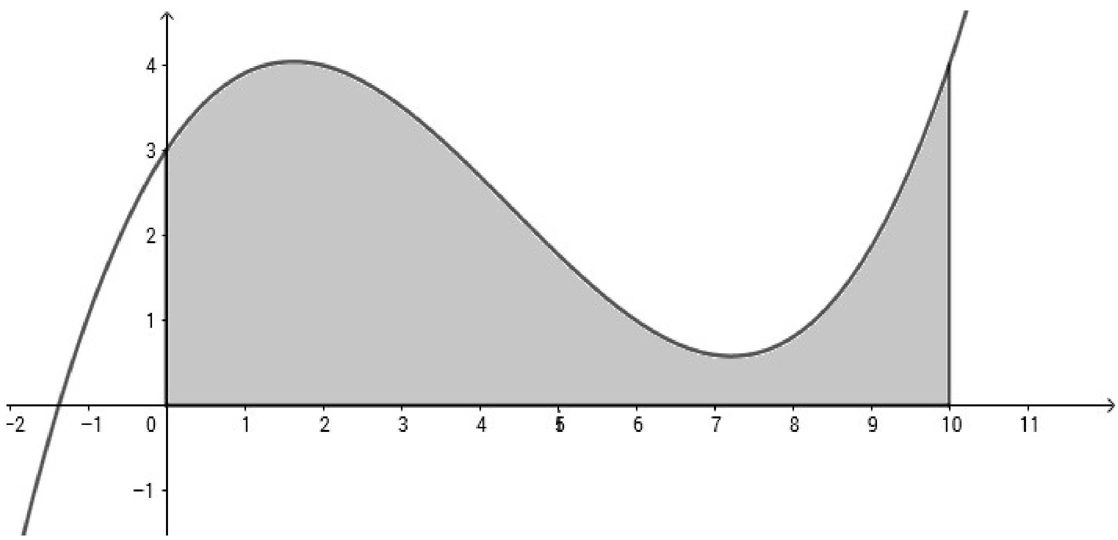
Ein wichtiger Punkt, was das Integral betrifft, ist, im Gegensatz zur Ableitung, seine Mehrdeutigkeit:

Es spielt ja zum Beispiel keine Rolle, ob wir x^2 oder x^2+5 ableiten. In beiden Fällen erhalten wir $f'(x)=2\mathrm{x}$. Das führt uns zu einer kleinen Ergänzung in unserer Tabelle, zum Beispiel erhalten wir:

$\int nx^{(n-1)}dx = x^n + c$. (Hinweis. Diese kleine Ergänzung wird sehr bedeutsam, wenn es um die Differentialgleichungen geht. Bei der Anwendung im folgenden Abschnitt, wo es um die Berechnung von Flächen unter Kurven geht, spielt diese Konstante keine Rolle.

8.2 Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

Die Integralrechnung ist, wie wir gesehen haben, entwickelt worden, um eine Funktion zu bestimmen, deren Ableitung wir kennen.Wir können mit ihr aber auch die Fläche unter einer vorgegebenen Kurve berechnen:



Das Kochrezept, um dies zu tun, geht so:

1. Bestimme das Integral der Funktion f. Dieses Integral nennen wir im folgenden F.
2.Wenn a und b die Grenzen eines Intervalls auf der x-Achse sind, bestimme F(a) und F(b)
3. Berechne F(b) – F(a)!

Das Ergebnis ist die Fläche unter der Kurve im Intervall [a,b]

Hinweis: Die Konstante c spielt bei dieser Berechnung keine Rolle, weil sie sich im Schritt 3 sowieso kürzt.

Die mathematischen Formeln für diese Art der Berechnung sehen so aus:

$$\text{Fläche} = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Die Tatsache, dass die Integralrechnung verwendet werden kann, um auf diese Weise Flächen unter Kurven zu bestimmen, heißt der „**Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung**".

Wir schauen uns nun noch 2 kleine Beispiele an, wie diese Flächenberechnung funktioniert:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) = -0 - (-1) = 1$$

und

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{8}{3} \quad .$$

8.3 Die Tücken der Integralrechnung

Bis jetzt war die Integralrechnung ja gar nicht so schwer, vorausgesetzt, wir sind vertraut mit der Differentialrechnung. Jede Ableitungsregel hatte ihre entsprechende Integral- („Aufleitungs“-) Regel und mit diesen Regeln konnten wir alle Beispielrechnungen durchführen. Allerdings fehlen uns bis jetzt noch die Umkehrungen für 3 Ableitungsregeln:

Die Kettenregel

Die Produktregel

Die Quotientenregel

Unglücklicherweise gibt es nun für diese 3 Regeln gar keine entsprechenden, einfach anzuwendenden, Integralregeln. Es ist nicht möglich, bei einer Verkettung, einem Produkt oder einem Quotienten von Funktionen das Integral so einfach zu berechnen.

8.4 Partielle Integration

Wir schauen uns nun zunächst die Produktregel der Differentialrechnung an:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

und schauen, ob wir so etwas wie eine Integrationsregel aus ihr gewinnen können.

Wir können unseren neuen Integral-Operator $\int$ auf beide Seiten der Gleichung davor schreiben und erhalten:

$$\int (f \cdot g)' = \int (f' \cdot g + f \cdot g') = \int (f' \cdot g) + \int (f \cdot g')$$

Auf der linken Seite steht und das Integral einer Ableitung. Die beiden sind invers zueinander, heben sich also auf, und wir bekommen:

$$f \cdot g = \int (f' \cdot g) + \int (f \cdot g')$$

$$\Rightarrow \quad \int (f' \cdot g) = f \cdot g - \int (f \cdot g')$$

Diese Regel heißt „**partielle Integration**“ - weil sie ein unbekanntes Integral durch ein anderes unbekanntes Integral ersetzt. Sie kann also nur nützlich sein, wenn das Integral auf der rechten Seite doch schon bekannt oder zumindest einfacher zu bestimmen ist als das auf der linken Seite. Dass das manchmal tatsächlich der Fall ist, schauen wir uns nun an einem Beispiel an.

In unserem Beispiel wollen wir $\int x\cdot e^x\,dx$ bestimmen. Im Integral sehen wir ein Produkt von Funktionen, wir können es also mit der partiellen Integration versuchen. Der erste Schritt dazu ist, zu entscheiden, welche der beiden Faktoren wir als Funktion und welche wir als Ableitung nehmen wollen. Was ist f' und was ist g ?

Wir haben keine Garantie, dass unsere Entscheidung auch zu einem Ergebnis führt. Schauen wir uns daher zunächst an, was bei der FALSCHEN Entscheidung passiert:

$$f'=x\,,\,g=e^x$$
$$f=\frac{1}{2}x^2,\,g'=e^x$$

$$\int x\,e^x\,dx=\frac{1}{2}x^2e^x-\int\frac{1}{2}x^2e^x\,dx=\frac{1}{2}x^2e^x-\frac{1}{2}\int x^2e^x\,dx$$

Sie sehen, wir haben ein unbekanntes Integral durch ein anderes unbekanntes Integral ersetzt und das sieht eher komplizierter aus als die Ausgangsaufgabe.

Aber es gibt ja auch eine RICHTIGE Entscheidung:

$$f'=e^x\,,\,g=x$$
$$f=e^x\,,\,g'=1$$

$$\int x\,e^x\,dx=e^x\cdot x-\int 1\cdot e^x\,dx=e^x\cdot x-e^x=e^x(x-1)$$

So haben wir unser unbekanntes Integral durch ein bekanntes ersetzt und sind tatsächlich zu einem Ergebnis gekommen.

Manchmal muss man die partielle Integration sogar zweimal anwenden, um zu einem Ergebnis zu kommen:

$$\int\sin(x)e^x\,dx$$
Entscheidung: $g=\sin(x),\,f'=e^x$
$$g'=\cos(x),\,f=e^x$$
Partielle Integration:
$$I:\int\sin(x)e^x\,dx=\sin(x)e^x-\int\cos(x)e^x\,dx$$

In der Gleichung I haben wir also wieder einmal das unbekannte Integral mit sin(x) durch eines mit cos(x) ersetzt. Wir geben aber an dieser Stelle nicht auf, sonder wiederholen das ganze noch einmal:

$$\int \cos(x) e^x \, dx$$
Entscheidung: $g=\cos(x),\ f'=e^x$
$$g'=-\sin(x),\ f=e^x$$
partielle Integration:
$$II: \int \cos(x) e^x dx = \cos(x) e^x - \int -\sin(x) e^x dx = \cos(x) e^x + \int \sin(x) e^x dx$$

Wenn wir nun die Gleichung II in die Gleichung I einsetzen, erhalten wir:

$$\int \sin(x) e^x dx = \sin(x) e^x - (\cos(x) e^x + \int \sin(x) e^x dx)$$
$$\Rightarrow \int \sin(x) e^x dx = \sin(x) e^x - \cos(x) e^x - \int \sin(x) e^x dx \quad | \ +\int \sin(x) e^x dx$$
$$\Rightarrow 2\int \sin(x) e^x dx = \sin(x) e^x - \cos(x) e^x \quad | \ /2$$
$$\Rightarrow \int \sin(x) e^x dx = \frac{\sin(x) e^x - \cos(x) e^x}{2}$$

Sie sehen also, manchmal kann man mit der partiellen Integration Stammfunktionen bestimmen, wenn man nur hartnäckig genug ist.

8.5 Substitutionsregel

Die Kettenregel führt uns zu einer weiteren Integrationsregel, die allerdings mit einer ähnlichen Unsicherheit verbunden ist. Es ist nicht sehr übersichtlich, diese Regel als Formel aufzuschreiben, daher folgt hier nun direkt ein „Kochrezept“:

Aufgabe: $\int f(g(x)) dx$

Leite g ab und schreibe das Ergebnis als Differentialquotient:
$$\frac{dg}{dx} = g' \ | \cdot dx$$
$$dg = dx \cdot g' \ | \ / g'$$
$$dx = \frac{dg}{g'}$$
Setze dx in das Integral oben ein und hoffe, dass es sich kürzt
$$\int f(g(x)) dx = \int \frac{f(g)}{g'} dg$$

Schwer verständlich? Wir schauen uns das wieder an einem Beispiel an:

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$
$$g=\sqrt{x} \Rightarrow \frac{dg}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$dx=2\sqrt{x}\,dg$$

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx=\int \frac{\sin(g)}{\sqrt{x}} 2\sqrt{x}\,dg=2\int \sin(g)\,dg$$

hier haben wir es mit einer bekannten Stammfunktion - der der sin-Funktion - zu tun

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx=2(-\cos(g))$$

im letzten Schritt ersetzen wir die substituierte Variable g durch den entsprechenden x-Term: (das ist die sogenannte Resubstitution) $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx=2(-\cos(\sqrt{x}))$

Ich denke, diese beiden Regeln, die partielle Integration und die Substitutionsregel, haben klargemacht, warum an dem Spruch „Differentialrechnung ist Handwerk, Integralrechnung ist Kunst“ etwas dran ist. Daher folgen nun noch Regeln, die zwar mittels der Substitutionsregel hergeleitet werden, die aber selber wie ein „Kochrezept“ anzuwenden sind, und so aus der Kunst wenigstens für einige Fälle wieder ein Handwerk machen.

8.5.1 Die innere Funktion ist linear

Wenn wir $\int f(ax+b)\,dx$ bestimmen sollen und die Stammfunktion von f bekannt ist, erhalten wir durch die Substitution:

$$\int f(ax+b)\,dx$$
$$g=ax+b\,,\ \frac{dg}{dx}=g'=a$$
$$dx=\frac{dg}{a}$$
$$\int f(ax+b)\,dx=\int f(g)\frac{dg}{a}=\frac{1}{a}\int f(g)\,dg$$

Da wir das Integral von f kennen, ist dies also immer ein lösbares Problem. Wir schauen uns wieder Beispiele an:

$$\int \cos(2x+4)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x+4)$$

$$\int \frac{1}{3x-6}\,dx = \frac{1}{3}\ln(3x-6)$$

8.5.2 Ein Quotient von Ableitung und Funktion

Wenn wir einen Quotienten vor uns haben, und die Funktion selbst steht im Nenner, während ihre Ableitung im Zähler steht, dann funktioniert das so:

$$\int \frac{f'}{f}\,dx$$
$$\frac{df}{dx} = f' \Rightarrow dx = \frac{df}{f'}$$

$$\int \frac{f'}{f}\,dx = \int \frac{f'}{f}\frac{df}{f'} = \int \frac{1}{f}\,df = \ln(|f|)$$

Und hier wieder zwei Beispiele, um zu sehen, wie das geht:

$$\int \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2}\,dx = \ln(|x^3+x^2|)$$
$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \ln(|\sin(x)|)$$

Manchmal können wir also „gebrochen-rationale“ Funktionen, bei denen der Zähler die Ableitung des Nenners ist, integrieren:

1. Überprüfe, ob der Zähler die Ableitung des Nenners ist
2. Wenn ja, dann erhalte wie oben eine ln(...) Funktion.
3. Wenn nicht, geht es mit Polynomdivision weiter, aber das ist ein anderes Thema.

Unsere Übersicht über den mathematischen Stoff, der Sie am Anfang Ihres Studiums erwartet, und was der mit dem zu tun hat, was Sie in der Schule schon gelernt haben, ist nun zu Ende.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg und dass Ihnen die Beschäftigung mit Mathematik auch viel Spaß macht. Und vergessen Sie nicht, dass bei der Mathematik das Eine – der Spaß – viel mit dem Anderen – dem Erfolg – zu tun hat.

9 Anhang

Literaturliste	
[1] David Graeber	Schulden - die ersten 5000 Jahre Verlag Klett-Cotta 8. Auflage 2012 ISBN 978-3608947670
[2] Rudolf Taschner	Die Zahl, die aus der Kälte kam Carl Hanser Verlag 2013 ISBN 978-3446436831
[3] Lambacher Schweizer	Mathematik Qualifikationsphase Klett-Verlag 2015 ISBN 978-3127354010