8 Differentialrechnung rückwärts – die Integralrechnung

8.1 Von der Änderung auf die Funktion selbst schließen

Nun können wir also den Gradienten – die Funktion, die beschreibt, wie sich eine Funktion ändert – für eine vorgegebene Funktion bestimmen. Oft sind Probleme aber als Gleichungen formuliert. Erinnern Sie sich? Als wir Exponentialgleichungen lösen wollten, brauchten wir die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion – den Logarithmus. Als wir Gleichungen mit Multiplikationen lösen wollten, brauchten wir die Division. Und heute sind viele wissenschaftliche Probleme in Form von Differentialgleichungen formuliert, die es zu lösen gilt. Stellen Sie sich vor, Sie kennen die Beschleunigung eines Satelliten und möchten wissen, wo er zu einem gegebenen Zeitpunkt ist. In der Physik gibt es dazu eine grundlegende Theorie, die Newton'schen Bewegungsgesetze. Sie beschreiben den Zusammenhang zwischen der Position **s** eines Objekts, seiner Geschwindigkeit **v** und seiner Beschleunigung **a**:

$$v=\frac{ds}{dt}, \qquad a=\frac{dv}{dt}$$

Dabei meinen $\frac{ds}{dt}, \frac{dv}{dt}$ die jeweiligen Differentialquotienten. Dies ist die sogenannte „Leibniz-Schreibweise“ der Ableitung, die etwas umständlich erscheinen mag, aber in der Integralrechnung ihre Vorteile hat.

Diese zwei Gleichungen, die einen Zusammenhang von einer Funktion und ihren Ableitungen beschreiben, werden Differentialgleichungen genannt. Auch in der Ökonomie – speziell der Volkswirtschaftslehre – spielen Differentialgleichungen eine Rolle. Wie man Differentialgleichungen löst, werden wir in diesem Kurs nicht behandeln, aber die Grundlage der Differentialgleichungen, die Integralrechnung, wollen wir uns nun anschauen.

Es geht also darum, aus einer Ableitung – z.B. der Geschwindigkeit eines Objekts – die Funktion, deren Ableitung sie ist – in unserem Beispiel die Position -, zu rekonstruieren.

Dazu zunächst einige Schreibweisen:

$$a=\frac{dv}{dt} \qquad v=\frac{ds}{dt}$$

$$dv=a\cdot dt \quad \text{und, analog} \quad ds=v\cdot dt$$

Wir schreiben: $v(t)=\int a(t)\,dt$

Wir schreiben: $s(t)=\int v(t)\,dt$

Wenn wir das Symbol t für die Zeit durch das allgemeine Symbol x ersetzen, wie es so oft in der Mathematik getan wird, dann ist $\int f(x)\,dx$ das Integral der vorgegebenen Funktion f(x). Oft wird es auch **Stammfunktion** genannt und als Symbol wird das große F verwendet.

Einige Integrale können wir sehr einfach bestimmen, da das Integral der Umkehr-Operator der Ableitung ist:

$(x^n)'=nx^{(n-1)}$	$\int nx^{(n-1)}\,dx=x^n$
$(e^x)'=e^x$	$\int e^x\,dx=e^x$
$(\ln(x))'=\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln(x)$
$(\sin(x))'=\cos(x)$	$\int \cos(x)\,dx=\sin(x)$
$(\cos(x))'=-\sin(x)$	$\int -\sin(x)\,dx=\cos(x)$

Die Summenregel und Faktorregel läßt sich ebenfalls direkt aus der Differentialrechnung übertragen:

$(c\cdot f)'=c\cdot f'$	$\int c\cdot f\,dx=c\cdot\int f\,dx$
$(f+g)'=f'+g'$	$\int (f+g)\,dx=\int f\,dx+\int g\,dx$

Einige dieser Regeln formulieren wir etwas um, damit sie handlicher in der Anwendung sind:

Regel aus der Differentialrechnung	Wird umformuliert
$\int nx^{(n-1)}\,dx=x^n$	$\int x^{(n-1)}\,dx=\frac{1}{n}x^n$ $\Rightarrow \int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$\int -\sin(x)\,dx = \cos(x)$	$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$

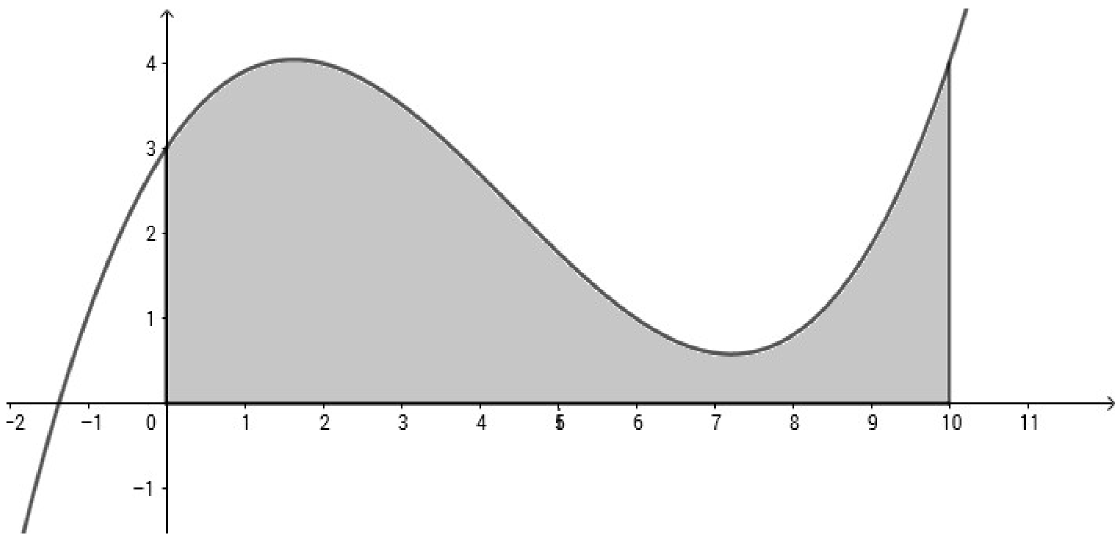
Ein wichtiger Punkt, was das Integral betrifft, ist, im Gegensatz zur Ableitung, seine Mehrdeutigkeit:

Es spielt ja zum Beispiel keine Rolle, ob wir x^2 oder x^2+5 ableiten. In beiden Fällen erhalten wir $f'(x)=2\mathrm{x}$. Das führt uns zu einer kleinen Ergänzung in unserer Tabelle, zum Beispiel erhalten wir:

$\int nx^{(n-1)}\,dx = x^n + c$. (Hinweis. Diese kleine Ergänzung wird sehr bedeutsam, wenn es um die Differentialgleichungen geht. Bei der Anwendung im folgenden Abschnitt, wo es um die Berechnung von Flächen unter Kurven geht, spielt diese Konstante keine Rolle.

8.2 Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

Die Integralrechnung ist, wie wir gesehen haben, entwickelt worden, um eine Funktion zu bestimmen, deren Ableitung wir kennen.Wir können mit ihr aber auch die Fläche unter einer vorgegebenen Kurve berechnen:



Das Kochrezept, um dies zu tun, geht so:

1. Bestimme das Integral der Funktion f. Dieses Integral nennen wir im folgenden F.
2.Wenn a und b die Grenzen eines Intervalls auf der x-Achse sind, bestimme F(a) und F(b)
3. Berechne F(b) – F(a)!

Das Ergebnis ist die Fläche unter der Kurve im Intervall [a,b]

Hinweis: Die Konstante c spielt bei dieser Berechnung keine Rolle, weil sie sich im Schritt 3 sowieso kürzt.

Die mathematischen Formeln für diese Art der Berechnung sehen so aus:

$$\textit{Fläche} \ = \ \int_a^b f(x)dx \ = \ [F(x)]_a^b \ = \ F(b)-F(a)$$

Die Tatsache, dass die Integralrechnung verwendet werden kann, um auf diese Weise Flächen unter Kurven zu bestimmen, heißt der „**Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung**“.

Wir schauen uns nun noch 2 kleine Beispiele an, wie diese Flächenberechnung funktioniert:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx \ = \ [-\cos(x)]_0^{\pi/2} \ = \ -\cos(\frac{\pi}{2})-(-\cos(0)) \ = \ -0-(-1)=1$$

und

$$\int_0^2 x^2 dx \ = \ [\frac{1}{3}x^3]_0^2 \ = \ \frac{1}{3}2^3-\frac{1}{3}0^3 \ = \ \frac{8}{3} \quad .$$

8.3 Die Tücken der Integralrechnung

Bis jetzt war die Integralrechnung ja gar nicht so schwer, vorausgesetzt, wir sind vertraut mit der Differentialrechnung. Jede Ableitungsregel hatte ihre entsprechende Integral- („Aufleitungs"-) Regel und mit diesen Regeln konnten wir alle Beispielrechnungen durchführen. Allerdings fehlen uns bis jetzt noch die Umkehrungen für 3 Ableitungsregeln:

Die Kettenregel

Die Produktregel

Die Quotientenregel

Unglücklicherweise gibt es nun für diese 3 Regeln gar keine entsprechenden, einfach anzuwendenden, Integralregeln. Es ist nicht möglich, bei einer Verkettung, einem Produkt oder einem Quotienten von Funktionen das Integral so einfach zu berechnen.

8.4 Partielle Integration

Wir schauen uns nun zunächst die Produktregel der Differentialrechnung an:

$$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$$

und schauen, ob wir so etwas wie eine Integrationsregel aus ihr gewinnen können.

Wir können unseren neuen Integral-Operator $\int$ auf beide Seiten der Gleichung davor schreiben und erhalten:

$$\int(f\cdot g)'=\int(f'\cdot g+f\cdot g')=\int(f'\cdot g)+\int(f\cdot g')$$

Auf der linken Seite steht und das Integral einer Ableitung. Die beiden sind invers zueinander, heben sich also auf, und wir bekommen:

$$f\cdot g=\int(f'\cdot g)+\int(f\cdot g')$$

$$\Rightarrow \quad \int(f'\cdot g)=f\cdot g-\int(f\cdot g')$$

Diese Regel heißt „**partielle Integration**" - weil sie ein unbekanntes Integral durch ein anderes unbekanntes Integral ersetzt. Sie kann also nur nützlich sein, wenn das Integral auf der rechten Seite doch schon bekannt oder zumindest einfacher zu bestimmen ist als das auf der linken Seite. Dass das manchmal tatsächlich der Fall ist, schauen wir uns nun an einem Beispiel an.

In unserem Beispiel wollen wir $\int x \cdot e^x dx$ bestimmen. Im Integral sehen wir ein Produkt von Funktionen, wir können es also mit der partiellen Integration versuchen. Der erste Schritt dazu ist, zu entscheiden, welche der beiden Faktoren wir als Funktion und welche wir als Ableitung nehmen wollen. Was ist f' und was ist g ?

Wir haben keine Garantie, dass unsere Entscheidung auch zu einem Ergebnis führt. Schauen wir uns daher zunächst an, was bei der FALSCHEN Entscheidung passiert:

$$f'=x, g=e^x$$
$$f=\frac{1}{2}x^{2,} g'=e^x$$

$$\int x e^x dx=\frac{1}{2}x^2 e^x - \int \frac{1}{2}x^2 e^x dx=\frac{1}{2}x^2 e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx$$

Sie sehen, wir haben ein unbekanntes Integral durch ein anderes unbekanntes Integral ersetzt und das sieht eher komplizierter aus als die Ausgangsaufgabe.

Aber es gibt ja auch eine RICHTIGE Entscheidung:

$$f'=e^x, g=x$$
$$f=e^x, g'=1$$

$$\int x e^x dx=e^x \cdot x - \int 1 \cdot e^x dx=e^x \cdot x - e^x=e^x(x-1)$$

So haben wir unser unbekanntes Integral durch ein bekanntes ersetzt und sind tatsächlich zu einem Ergebnis gekommen.

Manchmal muss man die partielle Integration sogar zweimal anwenden, um zu einem Ergebnis zu kommen:

$$\int \sin(x) e^x dx$$
$$\text{Entscheidung: } g=\sin(x), f'=e^x$$
$$g'=\cos(x), f=e^x$$
$$\text{Partielle Integration:}$$
$$I: \int \sin(x) e^x dx=\sin(x) e^x - \int \cos(x) e^x dx$$

In der Gleichung I haben wir also wieder einmal das unbekannte Integral mit sin(x) durch eines mit cos(x) ersetzt. Wir geben aber an dieser Stelle nicht auf, sonder wiederholen das ganze noch einmal:

$$\int \cos(x) e^x \, dx$$
$$\text{Entscheidung: } g = \cos(x), f' = e^x$$
$$g' = -\sin(x), f = e^x$$
$$\text{partielle Integration:}$$
$$II: \int \cos(x) e^x dx = \cos(x) e^x - \int -\sin(x) e^x dx = \cos(x) e^x + \int \sin(x) e^x dx$$

Wenn wir nun die Gleichung II in die Gleichung I einsetzen, erhalten wir:

$$\int \sin(x) e^x dx = \sin(x) e^x - (\cos(x) e^x + \int \sin(x) e^x dx)$$
$$\Rightarrow \int \sin(x) e^x dx = \sin(x) e^x - \cos(x) e^x - \int \sin(x) e^x dx \quad | \ + \int \sin(x) e^x dx$$
$$\Rightarrow 2 \int \sin(x) e^x dx = \sin(x) e^x - \cos(x) e^x \quad | \ /2$$
$$\Rightarrow \int \sin(x) e^x dx = \frac{\sin(x) e^x - \cos(x) e^x}{2}$$

Sie sehen also, manchmal kann man mit der partiellen Integration Stammfunktionen bestimmen, wenn man nur hartnäckig genug ist.

8.5 Substitutionsregel

Die Kettenregel führt uns zu einer weiteren Integrationsregel, die allerdings mit einer ähnlichen Unsicherheit verbunden ist. Es ist nicht sehr übersichtlich, diese Regel als Formel aufzuschreiben, daher folgt hier nun direkt ein „Kochrezept":

$$\text{Aufgabe: } \int f(g(x)) dx$$

Leite g ab und schreibe das Ergebnis als Differentialquotient:

$$\frac{dg}{dx} = g' \ | \cdot dx$$
$$dg = dx \cdot g' \ | \ / g'$$
$$dx = \frac{dg}{g'}$$

Setze dx in das Integral oben ein und hoffe, dass es sich kürzt

$$\int f(g(x)) dx = \int \frac{f(g)}{g'} dg$$

Schwer verständlich? Wir schauen uns das wieder an einem Beispiel an:

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$
$$g=\sqrt{x} \Rightarrow \frac{dg}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$dx=2\sqrt{x}\,dg$$

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx=\int \frac{\sin(g)}{\sqrt{x}} 2\sqrt{x}\,dg=2\int \sin(g)\,dg$$

hier haben wir es mit einer bekannten Stammfunktion - der der sin-Funktion - zu tun

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx=2(-\cos(g))$$

im letzten Schritt ersetzen wir die substituierte Variable g durch den entsprechenden x-Term:
(das ist die sogenannte Resubstitution) $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx=2(-\cos(\sqrt{x}))$

Ich denke, diese beiden Regeln, die partielle Integration und die Substitutionsregel, haben klargemacht, warum an dem Spruch „Differentialrechnung ist Handwerk, Integralrechnung ist Kunst“ etwas dran ist. Daher folgen nun noch Regeln, die zwar mittels der Substitutionsregel hergeleitet werden, die aber selber wie ein „Kochrezept“ anzuwenden sind, und so aus der Kunst wenigstens für einige Fälle wieder ein Handwerk machen.

8.5.1 Die innere Funktion ist linear

Wenn wir $\int f(ax+b)\,dx$ bestimmen sollen und die Stammfunktion von f bekannt ist, erhalten wir durch die Substitution:

$$\int f(ax+b)\,dx$$
$$g=ax+b, \frac{dg}{dx}=g'=a$$
$$dx=\frac{dg}{a}$$
$$\int f(ax+b)\,dx=\int f(g)\frac{dg}{a}=\frac{1}{a}\int f(g)\,dg$$

Da wir das Integral von f kennen, ist dies also immer ein lösbares Problem. Wir schauen uns wieder Beispiele an:

$$\int \cos(2x+4)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x+4)$$

$$\int \frac{1}{3x-6}\,dx = \frac{1}{3}\ln(3x-6)$$

8.5.2 Ein Quotient von Ableitung und Funktion

Wenn wir einen Quotienten vor uns haben, und die Funktion selbst steht im Nenner, während ihre Ableitung im Zähler steht, dann funktioniert das so:

$$\int \frac{f'}{f}\,dx$$
$$\frac{df}{dx} = f' \Rightarrow dx = \frac{df}{f'}$$

$$\int \frac{f'}{f}\,dx = \int \frac{f'}{f}\frac{df}{f'} = \int \frac{1}{f}\,df = \ln(|f|)$$

Und hier wieder zwei Beispiele, um zu sehen, wie das geht:

$$\int \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2}\,dx = \ln(|x^3+x^2|)$$
$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \ln(|\sin(x)|)$$

Manchmal können wir also „gebrochen-rationale“ Funktionen, bei denen der Zähler die Ableitung des Nenners ist, integrieren:

1. Überprüfe, ob der Zähler die Ableitung des Nenners ist
2. Wenn ja, dann erhalte wie oben eine ln(...) Funktion.
3. Wenn nicht, geht es mit Polynomdivision weiter, aber das ist ein anderes Thema.

Unsere Übersicht über den mathematischen Stoff, der Sie am Anfang Ihres Studiums erwartet, und was der mit dem zu tun hat, was Sie in der Schule schon gelernt haben, ist nun zu Ende.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg und dass Ihnen die Beschäftigung mit Mathematik auch viel Spaß macht. Und vergessen Sie nicht, dass bei der Mathematik das Eine – der Spaß – viel mit dem Anderen – dem Erfolg – zu tun hat.