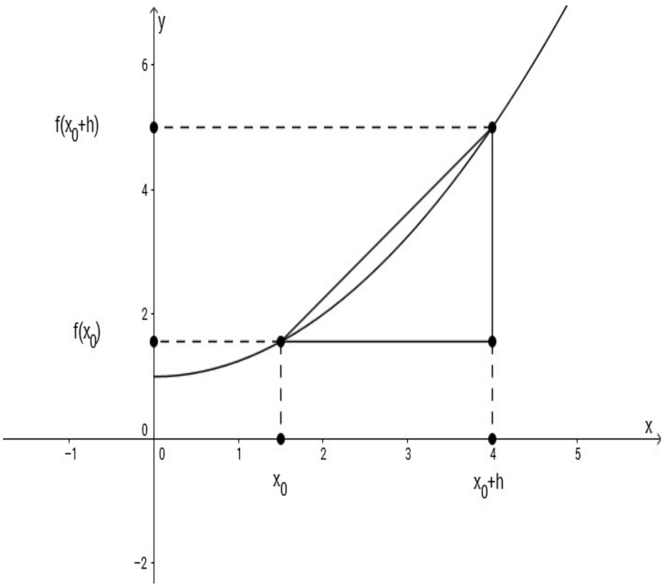
7 Ableitung – die Differentialrechnung

7.1 Einführung: Wie stark ändert sich ein Parameter?

Die Differentialrechnung wurde von G.W. Leibniz (1646 - 1716) und I. Newton (1643 – 1727) parallel entwickelt. Leibniz arbeitete am "Tangentenproblem" – Wie können wir Steigung und y-Abschnitt einer Tangente an einen vorgegebenen Funktionsgraphen bestimmen? - und Newton beschäftigte sich damit, wie man die Geschwindigkeit eines Körpers bestimmen kann, wenn man die Kraft kennt, die auf ihn wirkt.

Bei diesem Konzept geht es darum, die Änderungsrate einer vorgegebenen Funktion zu bestimmen. Es hat sich als sehr mächtig erwiesen, nicht nur im ursrprünglichen, physikalischen Kontext, sondern mittlerweile auch in der Ökonomie, speziell der Volkswirtschaftslehre und Operations Research.

Es basiert auf der Idee der **Grenzwerte**.



Um die Änderung oder Steigung einer vorgegebenen, möglichst beliebigen Funktion - den **Gradienten** – zu bestimmen, beginnen wir damit, uns die Situation bei einer einfachen Funktion, die wir bereits kennen, anzuschauen: Der Gerade. Die Steigung von $y=m\cdot x+b$ ist einfach m, das können wir ablesen! Wenn wir nun die Steigung einer beliebigen Funktion f an einem Punkt x_0 bestimmen möchten, können wir einen zweiten Punkt in der Nähe auswählen - etwa x_0+h - und wir können unsere Steigung näherungsweise berechnen:

$$\Delta f = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Natürlich ist Δf nicht exakt die Steigung am Punkt x_0, aber wenn wir h sehr klein wählen, wird die Abweichung der Steigung von unserem Wert auch sehr klein werden. Leider können wir h = 0 nicht wählen, weil in diesem Fall:

$$\Delta f = \frac{f(x_0+0)-f(x_0)}{h} = \frac{0}{0}$$

herauskommen würde. Und bekannterweise haben wir keine sinnvolle Definition von $\frac{0}{0}$.

Mit der Idee des „**Grenzwerts**" können wir dieses Problem aber lösen. Wir definieren:

$$f' = \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

und nennen diesen Term die Ableitung von f am Punkt x. Lassen Sie uns nun dieses Konzept am Beispiel $f(x)=x^2$ anschauen:

$$\begin{aligned} f' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2\cdot x\cdot h+h^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\cdot x\cdot h+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2\cdot x+h = 2\cdot x \end{aligned}$$

Weil wir in diesem Fall den Nenner kürzen konnten, konnten wir h einfach =0 setzen und so können wir den oben definierten Grenzwert für f bestimmen.

Die war nun eine Bestimmung einer Ableitung „from scratch" - von der Definition des Grenzwertes her. Es ist wichtig, dass wir immer im Hinterkopf behalten, was wir tun, wenn wir eine Ableitung bestimmen – es geht um eine Steigung -, aber im folgenden Abschnitt werden wir eine ganze Reihe Regeln kennenlernen, die genau dieses – sehr aufwändige – Verfahren vermeiden und und so viel Arbeit sparen.

7.2 Ableitungsregeln

Die Differentialrechnung enthält viel Tabellenwissen. Sehr oft benutzen wir keine Grenzwerte, um eine Ableitung zu berechnen und haben stattdessen diese Regeln im Hinterkopf – oder, solange wir damit noch nicht so vertraut sind, schauen wir auf eine solche Tabelle mit Ableitungsregeln. Einige dieser Regeln haben Namen – wie die Kettenregel – und einige sind namenlos, aber nichtsdestotrotz sind die namenlosen Regeln genau so wichtig wie die anderen. Sie haben die Ableitungsregeln vermutlich schon in der Schule gelernt. Hier daher eine Wiederholung:

Funktion	**Ableitung**	**Name der Regel**
x^a	$a \cdot x^{a-1}$	-
e^x	e^x	-
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	-
$\sin(x)$	$\cos(x)$	-
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	-
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$	Summenregel
$\alpha \cdot f(x)$	$\alpha \cdot f'(x)$	Faktorregel
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x)+f(x) \cdot g'(x)$	Produktregel
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x)-f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$	Quotientenregel
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$	Kettenregel

Mithilfe dieser Regeln können wir alle Ableitungen bestimmen, die wir so brauchen. Die erste Regel $x^a \rightarrow a \cdot x^{a-1}$ ist dabei nicht nur wichtig, um Polynome abzuleiten. Sie gilt auch für negative Exponenten und Brüche (und der Exponent a darf dabei sogar eine beliebige reelle Zahl sein).

So können wir mit dieser Regel auch die Wurzelfunktion ableiten:

$$
\begin{aligned}
& \left(\sqrt{(x)}\right)' \\
= \; & \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' \\
= \; & \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \\
= \; & \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \\
= \; & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \\
= \; & \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(x)}}
\end{aligned}
$$

Diese spezielle Ableitungsregel für die Wurzelfunktion müssen Sie nicht unbedingt kennen. Sie können sie ja, wie hier gezeigt, herleiten. Sie wird aber so oft benötigt, dass Sie einfach schneller sind, wenn Sie sich diese Regel gemerkt haben.

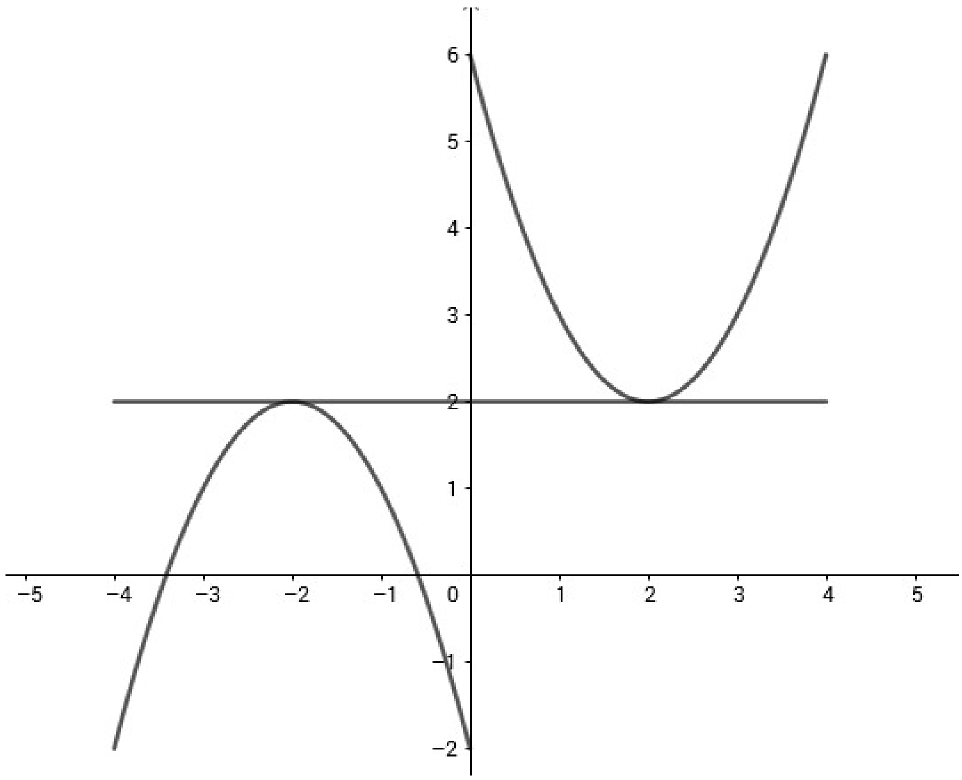
Die „Kunst“ der Ableitung ist nun, diese Regeln geeignet auf vorgegebene Funktionen anzuwenden. Einige Beispiele:

$\left(e^{(x^2)}\right)'$ $= \left(e^{(x^2)}\right) \cdot 2\mathrm{x}$ (Kettenregel, Ableitung von e^x und x^2)	$\left(\cos\left(x^2+2\mathrm{x}\right)\right)'$ $= -\sin\left(x^2+2\mathrm{x}\right) \cdot (2\mathrm{x}+2)$ (Kettenregel, Summenregel, Ableitung von $\sin(x)$ und $x^2+2\mathrm{x}$)
$\left(e^x \cdot \left(x^2+2\mathrm{x}\right)\right)'$ $= e^x \cdot \left(x^2+2\mathrm{x}\right) + e^x \cdot (2\mathrm{x}+2)$ (Produktregel, Ableitung von e^x und $x^2+2\mathrm{x}$)	$\left(\sin(3\mathrm{x}) \cdot \left(x^2+2\mathrm{x}\right)\right)'$ $= 3\cos(3\mathrm{x}) \cdot \left(x^2+2\mathrm{x}\right) + \sin(3\mathrm{x}) \cdot (2\mathrm{x}+2)$ (Produkt- und Kettenregel, Ableitung von e^x, sin(x) und $x^2+2\mathrm{x}$)

7.3 *Extremwerte und Skizzen von Funktionen*

Mit der Differentialrechnung können wir Extremwerte von Funktionen bestimmen. Wir können Punkte x finden, bei denen der Wert von f(x) besonders hoch oder niedrig ist. Das ist natürlich eine wertvolle Information, wenn unsere Funktion zum Beispiel Kosten oder Gewinn beschreibt.

Wie geht das nun, wenn man die Steigungsfunktion einer Funktion kennt? Wir sehen als erstes, dass sich eine Funktion an ihren Extremstellen NICHT ÄNDERT. Sie steigt nicht und sie fällt auch nicht.



So ist die Steigung an solchen Punkten also 0. Daher können wir

eine Funktion ableiten und

die Nullstellen der Ableitungsfunktion bestimmen

und bekommen so "Kandidaten" für ein Maximum oder Minimum.

Oben sind die Funktionen

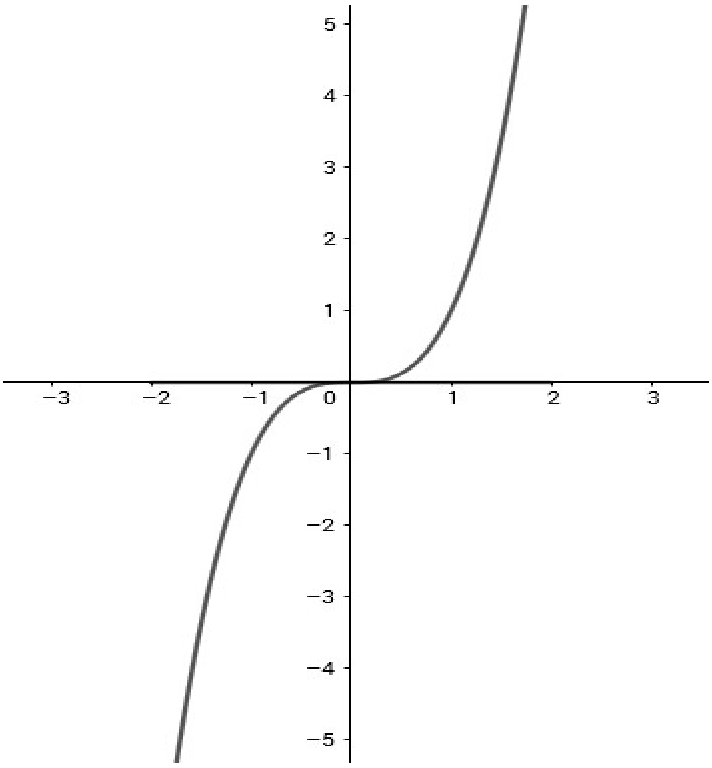
$f(x)=x^2-4x+6$ $f'(x)=2x-4=0$ $x=2$	$f(x)=-x^2-4x-2$ $f'(x)=-2x-4=0$ $x=-2$

Skizziert.

Bei diesen beiden Beispielen hat die Bestimmung der Extremwerte wunderbar funktioniert. Wir können aber nicht in jedem Fall sicher sein. Ein bekanntes Gegenbeispiel ist die Funktion $f(x)=x^3$: Würden wir rechnen:

$$f(x)=x^3$$
$$f'(x)=3x^2=0$$
$$x=0$$

hätten wir ein „Extremum“, das gar keines ist, wie wir an der Skizze leicht sehen können:



Diese Art Punkte nennen die Mathematiker „Sattelpunkte“. So stellt sich die Frage: Wie können wir zwischen Extremwerten und Sattelpunkten unterscheiden und wie können wir erkennen, ob ein Extremum ein Maximum oder ein Minimum ist?

7.4 Ableitungen höherer Ordnung, Krümmung, Wendepunkte

Schauen Sie sich für den Unterschied zwischen Minimum und Maximum die Skizze oben noch einmal an. Wir sehen, bei einem Maximum ist die Funktion rechtsgekrümmt,bei einem Minimum ist sie linksgekrümmt. Das bedeutet: Links vom Maximum steigt die Funktion, und die Ableitung ist daher positiv, rechts vom Maximum fällt sie, die Ableitung ist also negativ. Bei einem Minimum ist es genau umgekehrt. Daher gilt:

1. An einem Maximum fällt die Ableitung einer Funktion.
2. An einem Minimum steigt die Ableitung einer Funktion.

So kommen wir dazu, „höhere Ableitungen" zu bilden: Mit der zweiten Ableitung können wir zwischen Minimum und Maximum unterscheiden:

$f(x)=x^2-4\mathrm{x}+6$ $f'(x)=2\mathrm{x}-4=0$ $x=2$ $f''(x)=2$ $f''(2)=2>0\Rightarrow \text{minimum}$	$f(x)=-x^2-4\mathrm{x}-2$ $f'(x)=-2\mathrm{x}-4=0$ $x=-2$ $f''(x)=-2$ $f''(-2)=-2<0\Rightarrow \text{maximum}$

Und so haben wir ein erstes, vollständiges "Kochbuch" um Extremwerte zu bestimmen.Wenn an einer Nullstelle der ersten Ableitung die zweite Ableitung >0 ist, sind wir sicher, es mit einem Minimum zu tun zu haben und wenn an der Nullstelle die zweite Ableitung < 0 ist, dann haben wir es ganz sicher mit einem Maximum zu tun.

Allerdings hat unser Kochrezept eine Ausnahme: Wenn die zweite Ableitung ebenfalls = 0, ist, wissen wir gar nichts sicher. Es könnte ein Sattelpunkt sein, aber es könnte auch ein Extremwert sein. Wir können uns das an der Funktion $f(x)=x^4$ schnell klarmachen. In den meisten Fällen funktioniert dieses Rezept aber und ist daher an deutschen Schulen sehr beliebt.

Ein anderer Ansatz für eine Entscheidung zwischen Extremum oder Sattelpunkt ist es, das Vorzeichen der ersten Ableitung zu Rate zu ziehen. Wenn wir nämlich ein Maximum haben, dann steigt die Funktion links davon und fällt rechts. Die erste Ableitung ist also links > 0 und rechts < 0. Bei einem Minimum ist es genau umgekehrt. In beiden Fällen wechselt also das Vorzeichen:

Maximum	Minimum
$f(x)$ steigend $\rightarrow$ fallend $f'(x) > 0 \rightarrow < 0$	$f(x)$ fallend $\rightarrow$ steigend $f'(x) < 0 \rightarrow > 0$

Und so können wir prüfen, ob wir ein Minimum oder Maximum vor uns haben, indem wir zwei Punkte links und rechts von unserem Kandidaten beliebig wählen und schauen, was die Vorzeichen machen:

$f(x) = x^2 - 4x + 6$ $f'(x) = 2x - 4 = 0$ $x = 2$ $f'(1) = -2 < 0$ $f'(3) = 2 > 0 \Rightarrow \text{minimum}$	$f(x) = -x^2 - 4x - 2$ $f'(x) = -2x - 4 = 0$ $x = -2$ $f'(-3) = 2 > 0$ $f''(-1) = -2 < 0 \Rightarrow \text{maximum}$

Mit diesem Ansatz vermeiden wir das Problem, das bei $f' = 0$ und $f'' = 0$ auftritt. Wir haben ganz einfach einen Sattepunkt vor uns, wenn sich das Vorzeichen der ersten Ableitung NICHT ändert, unabhängig davon, ob es $< 0 \rightarrow < 0$ oder $> 0 \rightarrow > 0$ ist. Aber **VORSICHT**: Vielleicht hat unsere Funktion auch eine Definitionslücke (wie etwa die 0 eine Definitionslücke von $\frac{1}{x}$ ist). Unsere willkürlich ausgewählten Punkte müssen in diesem Fall näher am zu untersuchenden Punkt sein als diese Definitionslücken. So vermeiden wir, eine zweite Ableitung zu bestimmen, wir müssen aber die Definitionslücken unserer Funktion kennen. Dafür vermeiden wir den Fall, bei dem wir mit dem anderen Ansatz zu keiner Entscheidung kommen.

Welcher Ansatz ist nun besser? Die Antwort auf diese Frage hängt von f ab und auch von Ihrer Übung im Ableiten.

7.5 Wendepunkte

Ein weiterer wichtiger Aspekt der Differentialrechnung sind die „Wendepunkte“.Wenn wir uns den Graphen von $f(x)=x^3$ anschauen, sehen wir, dass die Funktion links von der 0 rechtsgekrümmt ist und dass sie rechts von der 0 linksgekrümmt ist. Ihr Krümmungsverhalten ändert sich also am 0-Punkt. Solche Punkte einer Funktion, an denen sich das Krümmungsverhalten ändert, nennen wir **Wendepunkte**. Wir können sie bestimmen, indem wir eine vorgegebene Funktion ableiten und dann die lokalen Extremwerte der ersten Ableitung bestimmen. Ein Beispiel einer solchen Berechnung:

$f(x)=x^3-6x^2+12x$
$g(x)=f'(x)=3x^2-12x+12$ nun schauen wir nach Extremwerten dieser Funktion
$g'(x)=f''(x)=6x-12=0$
$x=2\; g''(x)=f'''(x)=6$
$g''(2)=f'''(2)=6>0$
g=f' hat ein Minimum bei x=2
2 ist ein Wendepunkt von f

Wendepunkte sind im ökonomischen Kontext wichtig, um vorherzusagen, wie sich eine Funktion der Zeit in Zukunft verhalten wird. Wenn wir zum Beispiel eine fallende Gewinnfunktion haben, die rechtsgekrümmt ist, dann wird in Zukunft der Verlust immer größer werden. Wenn wir aber eine fallende Gewinnfunktion linksgekrümmt ist, wird sie vielleicht bald ihr Minimum erreichen.