6 Funktionen

6.1 *Funktionen als ein Mittel, mathematische Probleme zu formulieren*

Die Funktionen sind in der Mathematik eines der nützlichsten Konzepte. Mittels Funktionen und Gleichungen, die Funktionsterme enthalten, werden heute Zusammenhänge in der Natur, oder Gesetzmäßigkeiten des Verhaltens von Menschen, dargestellt. Mit den Kanonenkugeln, die in Parabeln fliegen, die mit quadratischen Funktionen beschrieben werden können, haben wir uns schon beschäftigt. Im wirtschaftlichen Zusammenhang führt die Beschäftigung mit Zins und Zinseszins zur Exponential- und Logarithmus-Funktion. So sind die Funktionen ein wichtiger Bestandteil der „mathematischen Sprache“ geworden und wir wollen deshalb mit ihnen möglichst vertraut werden.

Lassen Sie uns zunächst schauen, was eine **Funktion** ist:

6.1.1 Definition von Funktionen

X und Y seien Mengen. Eine **Zuordnung** oder Funktion von X (**Urbildmenge**) nach Y (**Bildmenge**) ordnet jedem Element von X ein – und genau ein - Element von Y zu. $x \in X$ heißt das **Argument** and $y \in Y$ der **Funktionswert** oder das **Bild** von x.

Schreibweisen:

$$f: X \to Y, \quad x \to y = f(x)$$

Die Menge aller Funktionswerte

$$f(X) = \{ \ f(x) \ | \ x \in X \ \}$$

heißt das **Bild von X unter f**.

Um eine Funktion zu beschreiben, ist es wichtig, für jedes $x \in X$ einen Funktionswert anzugeben. Eine oft benutzte Methode, dies zu tun, ist eine Gleichung. Zum Beispiel definieren:

$$f(x) = e^x, f(s) = e^s, f(t) = e^t, f(\mu) = e^\mu$$

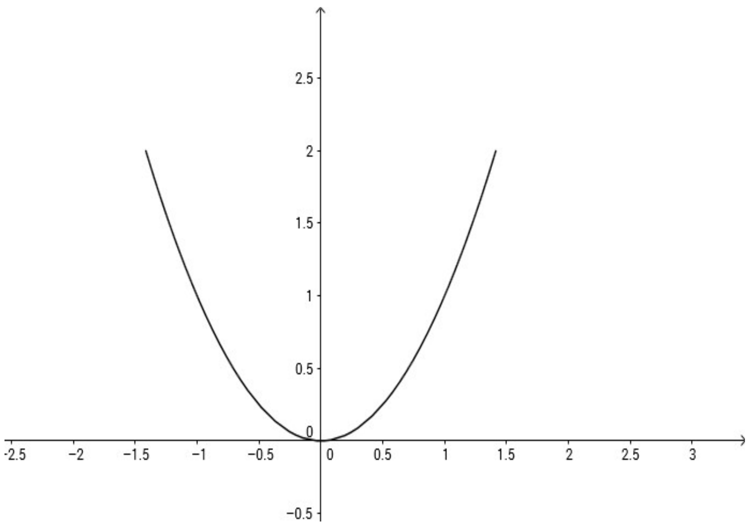
alle dieselbe Funktion f. Das Symbol - x, s, t, μ - ist dabei unerheblich und nur ein Name für das Argument.

6.1.2 Der Graph einer Funktion

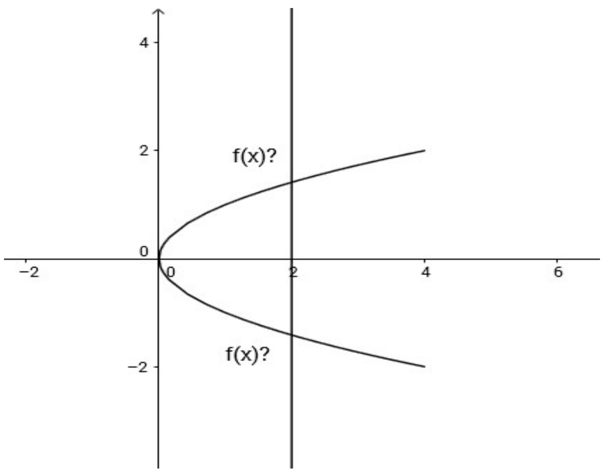
Im Fall von Funktionen reeller Zahlen - $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$, ist der **Graph** von f die Menge der geordneten Paare

$$G_f = \{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ x \in D \ \wedge \ y = f(x) \ \}$$

Zum Beispiel können wir die Funktion $f: [-\sqrt{(2)}, \sqrt{(2)}] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ auf die folgende Weise visualisieren:



Lassen Sie uns nun den folgenden Graphen anschauen:



Beschrieben ist er durch die Gleichung $y^2=x, \; y \in [-2,2]$. Aber shen wir hier überhaupt das Bild einer Funktion? Nein, da wir in diesem Fall zwei Werte haben, die einem Wert auf der x-Achse zugeordnet sind. So liegen zum Beispiel $(2,\sqrt{2}),(2,-\sqrt{2})$ auf unserem Graphen, der Wert 2 ist also zwei Werten zugeordnet.
Den zweiten Graphen erhalten wir, wenn wir den von x^2 „invertieren“. Dabei vertauschen wir die x- und die y-Achse so, dass die y-Achse nach rechts und die x-Achse nach oben zeigen. Wie Sie sehen können, erhalten wir, wenn wir eine Funktion invertieren, nicht immer auch wieder eine Funktion. Aber Sie kennen die Funktion $\sqrt{x}$ als Umkehrfunktion von x^2 . Wie ist das möglich? Die Mathematiker warfen einfach 50% des Graphen (den Teil unter der x-Achse) weg und machten so die Zuordnung eindeutig.

6.2 Kombinationen von Funktionen

Funktionen werden oft mit Summen, Differenzen, Produkten oder Quotiernten verschiedener Ausdrücke beschrieben.Zum Beispiel können wir

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x), etc \quad .$$

definieren. Sehr wichtig ist auch die **Verkettung von Funktionen**. Die bekommen wir, wenn wir den Funktionswert der einen Funktion als Argument der zweiten Funktion verwenden:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

Sie sehen, wir bestimmen zunächst g(x) und nehmen das Ergebnis als Argument von f.

Ein Beispiel: Seien $f(x)=2\cdot x+5$ und $g(x)=x^2-7$. Dann ist:

$$\begin{aligned} &(f\circ g)(x)\\ =\;& 2\cdot(g(x))+5\\ =\;& 2\cdot(x^2-7)+5\\ =\;& 2\cdot x^2-9 \end{aligned}$$

Die Verkettung in umgekehrter Reihenfolge kommt zu einem anderen Ergebnis:

$$\begin{aligned} &(g\circ f)(x)\\ =\;& (f(x))^2-7\\ =\;& (2\cdot x+5)^2-7\\ =\;& 4\cdot x^2+20\cdot x+25-7\\ =\;& 4\cdot x^2+20\cdot x+18 \end{aligned}$$

6.3 *Inverse- oder Umkehrfunktionen*

Umkehrfunktionen sind essentiell, um Gleichungen zu lösen. Zum Beispiel haben wir schon gerechnet:

$$\begin{aligned} 2^x &= 8 \qquad\qquad \mid \log_2(...) \\ x &= \log_2(8) = 3 \end{aligned}$$

Jetzt, wo wir das Konzept der Verkettung von Funktionen zur Verfügung haben, können wir definieren:

Sei $f: X \to Y$ eine Funktion. Wenn wir dann eine Funktion $f^{-1}: f(X) \subset Y \to X$ finden, für die gilt:

$(f^{-1} \circ f)(x) = x$ für alle $x \in X$, dann nennen wir f^{-1} die **Umkehrfunktion** von f.

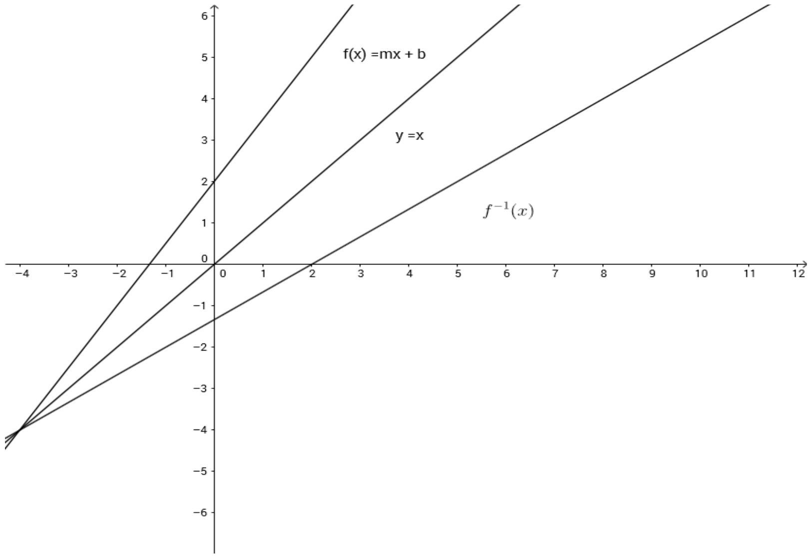
Hinweis: In dieser Schreibweise meint f^{-1} **nicht** den Kehrwert $\frac{1}{f(x)}$, das Symbol -1 ist in diesem Fall also kein Exponent!

6.3.1 Die Umkehrfunktion einer linearen Funktion

Sei $f(x) = m \cdot x + b, m \neq 0$ eine lineare Funktion. Dann erhalten wir die Umkehrfunktion, indem wir die Funktionsgleichung nach x umstellen:

$$\begin{aligned} y &= m \cdot x + b \quad \mid -b \\ y - b &= m \cdot x \quad \mid \div m \\ \frac{1}{m} \cdot y - \frac{1}{m} \cdot b &= x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

und wir erkennen, die Umkehrfunktion einer linearen Funktion ist wieder eine lineare Funktion. Wenn wir die Graphen anschauen, stellt sich die Situation so dar:



Ein interessanter Aspekt der Sache: Wir erhalten die Umkehrfunktion, indem wir den Funktionsgraphen an der y=x-Geraden (Winkelhalbierenden) **spiegeln**. Dahinter steckt ein allgemeingültiges Prinzip:

Wenn eine Funktion f in einem Koordinatensystem gegeben ist, erhalten wir die Umkehrfunktion, indem wir den Graphen der Funktion an der Winkelhalbierenden spiegeln.

6.3.2 Exponentialfunktion und Logarithmus

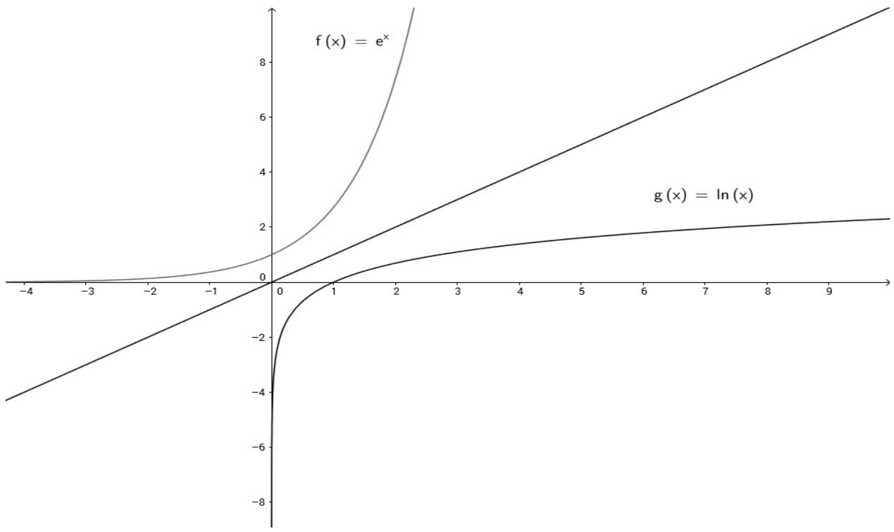
Die Exponentialfunktion beschreibt Wachstumsprozesse - in der Natur und in ökonomischen Zusammenhängen. Und auch manche Prozesse, bei denen sich etwas verringert – wie beim radioaktiven Zerfall oder beim Wertverlust des Geldes unter Inflation – werden durch diese Funktionen beschrieben.

Die **Logarithmusfunktion** ist die **Umkehrfunktion** der entsprechenden **Exponentialfunktion**:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln(x)$$
$$\ln(e^x) = e^{\ln(x)} = x$$

und, verallgemeinert:

$$f(x)=a^x \Rightarrow f^{-1}(x)=\log_a(x)$$
$$\log_a(a^x) = a^{\log_a(x)} = x$$



Wir schauen uns die **Definitionsbereiche** (Urbild- und Bildmengen) dieser Funktionen an:

$$a^x : \mathbb{R} \to (0,\infty) \quad , \quad \log_a(x) : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

- ***Was Inflation mit Exponentialfunktion und Logarithmus zu tun hat***

Inflation wird prozentual beschrieben. Wir haben zum Beispiel eine Inflationsrate von 3% pro Jahr. Was bedeutet das? Es bedeutet, dass, wenn wir in diesem Jahr für einen Geldbetrag eine bestimmte Menge Güter kaufen können, wir im nächsten Jahr 3% mehr Geld für dieselbe Menge Güter benötigen werden.

Wenn wir also in diesem Jahr 1.000€ für Güter ausgeben, werden wir im nächsten Jahr 1030€ benötigen. Das bedeutet für den Wertverlust des Geldes: Wenn wir im nächsten Jahr 1.030€ statt 1.000€ benötigen, dann haben 1.000€ an Wert verloren. Und zwar können wir den Wertverlust so berechnen:

$$1000 \cdot \frac{1}{1+0.03} \;=\; 970.87$$

Das ist ungefähr die Differenz $1000 \cdot (1-0.03)=970$, aber nicht ganz genau. Den genauen Wert bekommen wir, wenn wir einen Kehrwert berechnen, aber in Zeitungen finden wir oft eine Differenz stattdessen. Das macht bei einer Inflationsrate von 3% und einem Zeitraum von einem Jahr nur einen kleinen Unterschied aus, aber was passiert, wenn wir uns längere Zeiträume anschauen?

Hier haben wir zum Beispiel eine Beispielrechnung für 30 Jahre:

$$\begin{array}{l} \text{In 30 years benötigen wir statt 1000€:} \\ 1000 \cdot 1.03^{30} = 1000 \cdot (1+1.42726) = 2426.26 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Wir berechnen also den Wert von 1000€ in 30 Jahren so:} \\ 1000 \cdot \frac{1}{2.42726} = 411.99 \end{array}$$

Wenn wir hier stattdessen mit der Differenz $1000 \cdot (1-1.42729)$ rechnen würden, käme ein negativer Wert heraus, was beim Geld nicht wirklich sinnvoll ist.

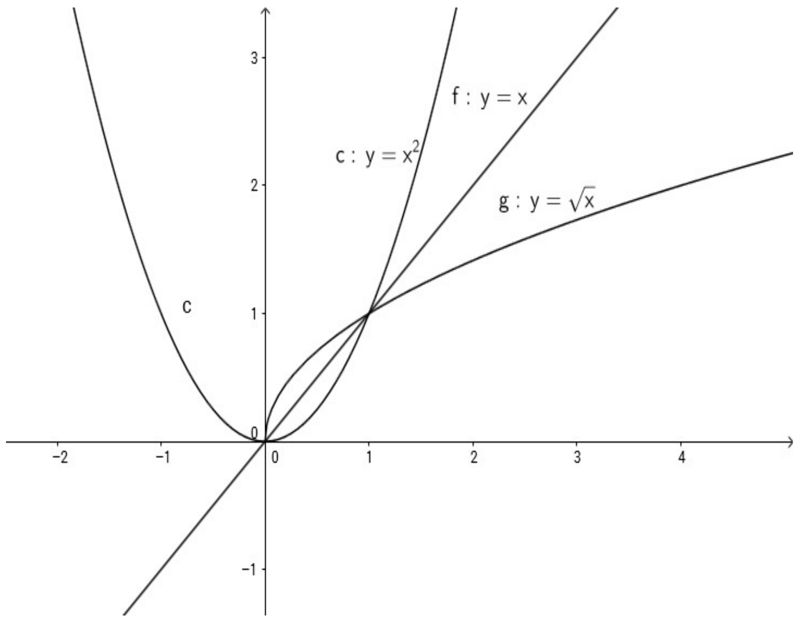
Wir merken uns also: Um den Wertverlust bei Inflation zu berechnen, benutzen wir die Formel $\frac{1}{1+p/100\%}$. Mit Differenzen zu rechnen führt bei langen Laufzeiten zu dramatisch falschen Ergebnissen!

6.3.3 Quadrat- und Wurzelfunktion

Die **Wurzelfunktion** $\sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion der **Quadratfunktion** x^2 . Es gilt also

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{x}^2 = x \,, if\ 0 \leqslant x$$

Graphisch stellt sich das so dar:

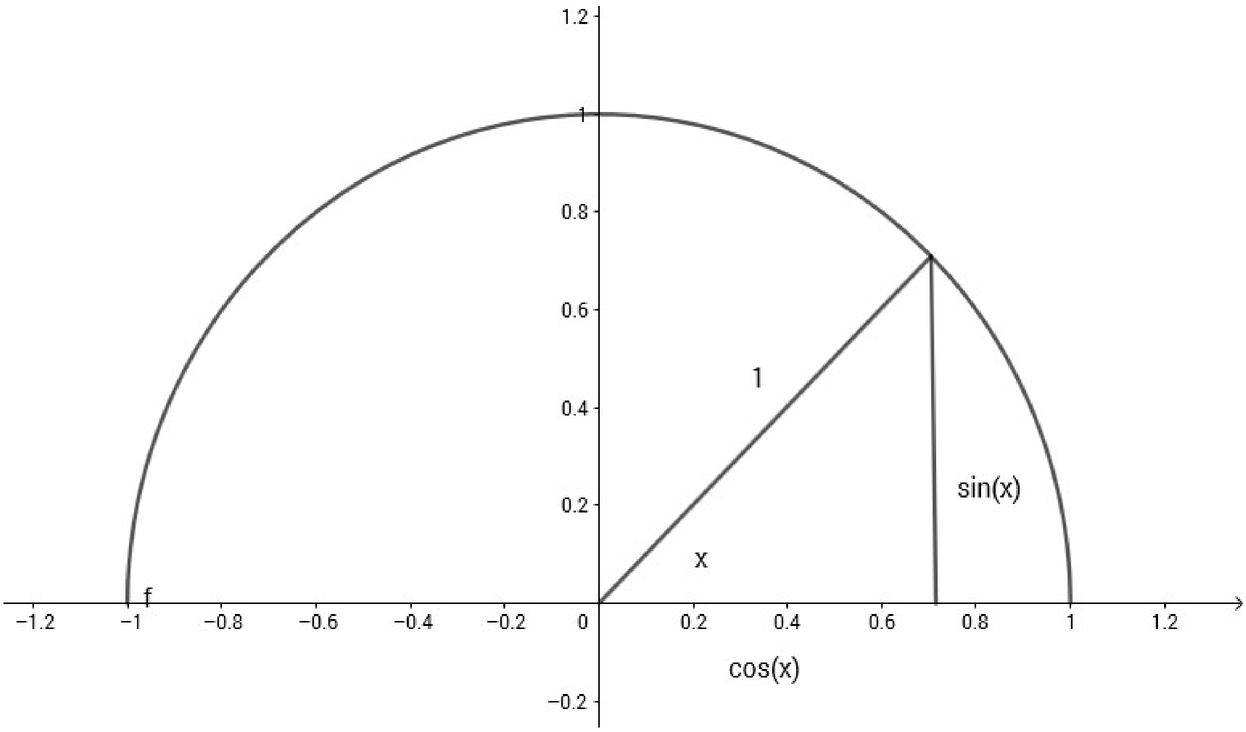


Wir wir schon gesehen haben, würden wir keine Funktion bekommen, wenn wir x^2 einfach an der Winkelhalbierenden spiegeln würden.Wir beschränken uns also auf die **positiven Wurzeln** und erhalten so die Bereiche:

$$x^2 : \mathbb{R} \rightarrow [0,\infty) \ , \ \sqrt{x} : [0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$$

6.4 Trigonometrische Funktionen

Der lateinische Name "trigonometrisch" bedeutet "Dreiecke messend" und genau das ist es, wofür diese Funktionen ins Leben kamen. Landvermesser brauchten sie, um aus gemessenen Winkeln die jeweils fehlenden Längen zu berechnen. Es wäre viel zu aufwändig gewesen, alle Längen zu messen, und manchmal auch, wenn z.B. ein Fluss zwischen zwei Punkten lag, unmöglich.



Wir definieren sie mit einem Winkel ϕ als Argument:

$$\sin(\phi) = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse} \quad \text{and} \quad \cos(\phi) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse}$$

Mit diesen Funktionen können wir, wenn wir eine Länge und alle Winkel eines Dreiecks kennen, die fehlenden Längen berechnen. Wenn wir die Länge einer Kathete wissen möchten und die Länge der Hypothenuse nicht brauchen, ist zusätzlich nützlich:

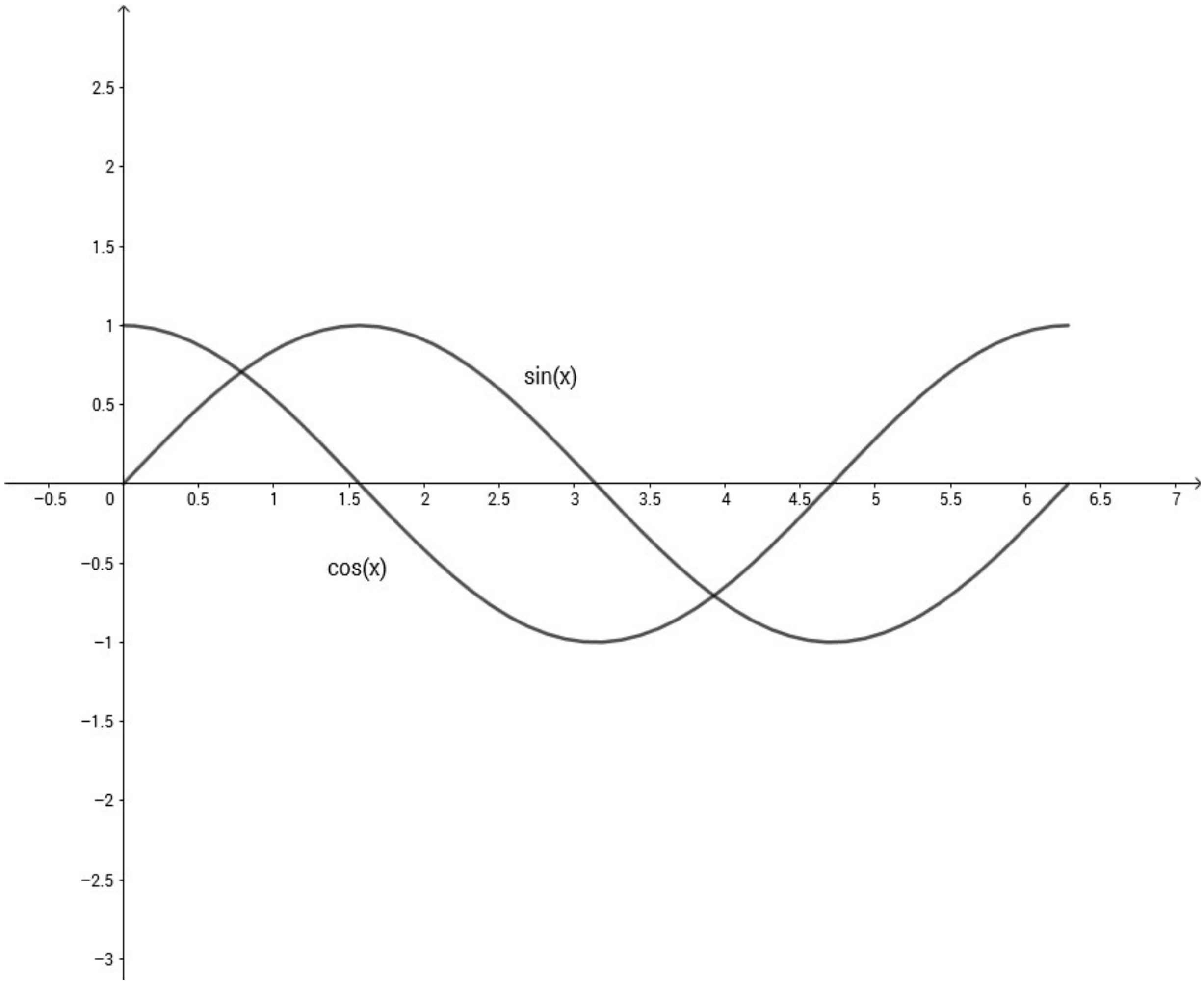
$$\tan(\phi) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} \quad \text{und} \quad \cot(\phi) = \frac{Ankathete}{Gegenkathete} = \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}$$

Hinweis: Wir erinnern uns an den Satz des Pythagoras und bekommen so:

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

In unserer technischen Welt sind diese Funktionen wichtig geworden, um Vorgänge, die auf Schwingungen basieren, zu beschreiben. Ein Beispiel ist der Wechselstrom. Im Bereich der Wirtschaft können wir z.B. periodisch schwankende Preise („Schweinezyklus“) mit Ihnen beschreiben.

Schauen wir uns die Funktionen in einem Koordinatensystem an:



In der Schule haben wir zwei Arten kennengelernt, Winkel zu beschreiben. Die erste definiert einen vollen Kreis als $360°$ und einen rechten Winkel entsprechend als $90°$. Das **Gradmaß** ist eine sehr alte Methode, Winkel zu messen, und sie arbeitet wunderbar, solange wir nicht mit Differentialrechnung zu tun haben. Sinus und Cosinus mit Winkeln im

Gradmaß kann man aber nicht so gut ableiten und das ist der Grund, warum Sie noch eine weitere Methode kennenlernten, Winkel zu messen. Beim **Bogenmaß** ist ein voller Kreis $2\cdot\pi$ und ein rechter Winkel ist entsprechend $\frac{\pi}{2}$. Da es diese beiden Wege, Winkel zu messen, nun einmal gibt, brauchen wir jeweils eine präzise Vorstellung, wie unsere Winkel jeweils gemessen werden. Im Taschenrechner heiß das Gradmaß DEG(ree) und das Bogenmaß RAD(iant).

Die sinus- und cosinus-Funktionen werden an der Universität oft in der Differential- und Integralrechnung verwendet, und dafür sollten wir mit dem Bogenmaß vertraut sein.

Um sich die wichtigsten Werte (Dies ist besonders wichtig, wenn Sie eine Klausur ohne Taschenrechner schreiben!) merken zu können, schauen Sie auf diese Tabelle:

Gradmaß	Bogenmaß	sin(x)	cos(x)	tan(x)	cot(x)
$0°$	0	0	1	0	Nicht definiert
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Nicht definiert	0

Das sind viele Werte, aber sie haben ein einfaches Bildungsgesetz: Wenn Sie sich die Sinus-Spalte anschauen, können Sie erkennen, dass $\frac{\sqrt{0}}{2}=0, \frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}=1$, wir haben also eine recht einfache Folge, bei der wir immer wieder eine Wurzel bilden und durch 2 teilen. In der Cosinus-Spalte finden Sie exakt die gleichen Werte wie in der Sinus-Spalte – **aber in umgekehrter Reihenfolge**. Die Werte der Tangens- und Cotangens-Spalte erhalten Sie, indem Sie einfach die entsprechenden Werte der Sinus- und Cosinus-Spalte dividieren.

Mit dieser Tabelle im Hinterkopf – oder auf einem Blatt Papier vor uns – können wir nun Gleichungen mit diesen Funktionen lösen:

$\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ führt uns zu:

$$x=\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6} \text{ oder - wegen der Symmetrie der Funktion } x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$$

Hinweis: Trigonometrische Gleichungen haben in der Regel zwei Lösungen im Intervall $[0,2\pi]$! Der Taschenrechner gibt uns davon nur eine, und die Hauptaufgabe beim Lösen einer solchen Gleichung besteht darin, die zweite zu bestimmen!