3.7.1 Wie man allgemein Exponential- und Logarithmus-Werte berechnet

In unserem kleinen Beispiel mussten wir einen Logarithmus zur Basis 1.03 and eine Exponentialfunktion zur Basis 2 berechnen. Viele Taschenrechner können aber nur mit den Basen "e" (=2.718....) oder 10 umgehen.

Wir brauchen daher 2 Regeln, um solche Berechnungen auch für andere Basen machen zu können:

$$a^x = e^{\ln(a)\cdot x} = 10^{\log_{10}(a)\cdot x}$$

$$\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\ln(x) = \frac{1}{\log_{10}(a)}\cdot\log_{10}(x)$$

Warum diese beiden Regeln gelten, wollen wir uns plausibel machen:

Dafür schauen wir uns zunächst eine erste Logarithmus-Regel am Beispiel des ln(x) an. Es ist

$$e^{\ln(x\cdot y)} = x\cdot y$$

, da die e-Funktion und der ln sich gegenseitig aufheben. Es gilt wegen der oben schon hergeleiteten Potenzgesetze aber auch

$$e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)}\cdot e^{\ln(y)} = x\cdot y$$

insgesamt also $e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x\cdot y)}$. Wenn wir nun auf beiden Seiten der Gleichung den ln() anwenden, sehen wir, dass $\ln(x)+\ln(y)=\ln(x\cdot y)$ gilt. Und diese Regel gilt entsprechend für alle Logarithmen, wir haben ja überhaupt nichts benutzt, was wir mit einer Basis a nicht hätten machen können. Aus dieser Regel können wir uns eine zweite Regel plausibel machen. Es ist ja $\ln(x^2)=\ln(x\cdot x)=\ln(x)+\ln(x)=2\cdot\ln(x)$ und wir könnten diese Rechnung mit beliebigen Potenzen ausführen. So bekommen wir

$$\ln(x^y) = y\cdot\ln(x) \quad ,$$

und diese Regel ist auch auf alle Logarithmen erweiterbar. Nun haben wir die Voraussetzung dafür, zu sehen, warum die erste der beiden Regeln oben gilt. Es ist nämlich:

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\cdot\ln(a)} \quad ,$$

und bis auf die Reihenfolge ist das genau das, was wir uns klarmachen wollten.

Nun schauen wir uns noch die zweite Regel an. Da sich die jeweilige Exponentialfunktion und ihr zugehöriger Logarithmus aufheben, gilt

$$a^{\log_a(x)} = x \quad .$$

Mit der ersten Regel können wir diese allgemeine Potenz aber auch als E-Funktion schreiben und so bekommen wir

$$e^{\ln(a) \cdot \log_a(x)} = x$$

Wenn wir nun bei dieser Gleichung auf beiden Seiten den ln() anwenden, erkennen wir, dass $\ln(a) \cdot \log_a(x) = \ln(x)$ gilt. Wenn wir diese Gleichung durch den ln(a) dividieren, sehen wir auch ein, dass auch die zweite Gleichung gilt.

Mit diesen beiden Regeln können wir die Werte für beliebige Basen berechnen: Wenn wir eine Exponentialfunktion kennen, kennen wir alle. Und wenn wir eine Logarithmusfunktion kennen, kennen wir alle.

4 Lineare Gleichungssysteme

Im 2. Kapitel haben wir bereits ein ökonomisches Problem als zwei lineare Gleichungen formuliert:

$$\begin{array}{lclcl} 4\cdot x & + & 100 & = & y \\ 5.5\cdot x & & & = & y \end{array}$$

Nun schauen wir uns dieses Konzept genauer an. Im zweiten Kapitel haben wir uns nicht groß darum gekümmert, dass wir ZWEI Gleichungen mit ZWEI Unbekannten hatten. Wir haben einfach die beiden gleichgesetzt und konnten so das x ausrechnen. Das ging, weil die Gleichungen die Form

$$a\cdot x+b \quad = \quad y$$

hatten und wir daher direkt sehen konnten, dass wir so schnell ans Ziel kommen. Wir könnten dasselbe Problem aber auch ein wenig anders formulieren:

$$\begin{array}{lclcl} 4\cdot x & + & (-1)\cdot y & = & -100 \\ 5.5\cdot x & + & (-1)\cdot y & = & 0 \end{array}$$

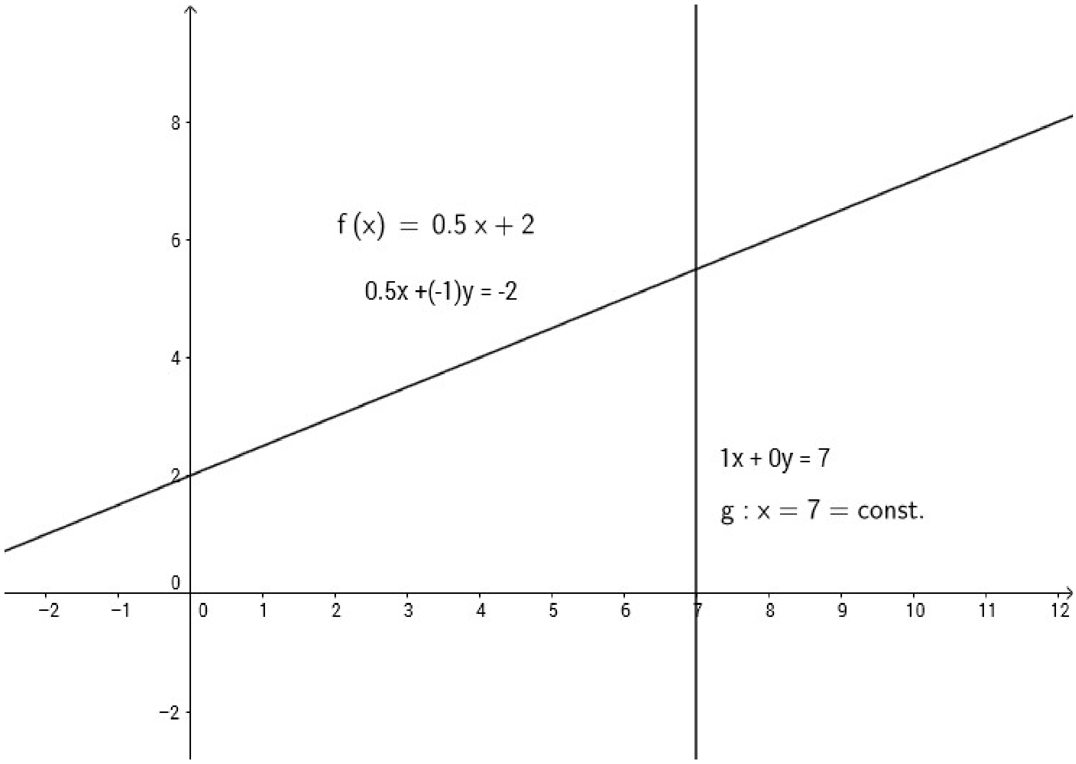
Und diese Form, das Problem zu formulieren hat einen großen Vorteil: Sie klappt für jede lineare Gleichung, wohingegen wir Geraden finden, die sich durch die Form

$$y \quad = \quad m\cdot x \quad + \quad b$$

nicht beschreiben lassen. Es sind die senkrechten Geraden, die durch Gleichungen der Form

$$x \quad = \quad const$$

beschrieben werden können, die wir aber nicht in die Form y = ... überführen können.



Ein weiterer Vorteil: Das Konzept ist einfach erweiterbar auf 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten, 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten usw.

Wenn wir solche Probleme formulieren, ist es keine gute Idee, eine der beiden Unbekannten – das y – zu bevorzugen, indem wir es auf die rechte Seite der Gleichung bringen. Bevor wir uns diesem Aufgabentyp – Lineare Gleichungssysteme höheren Grades – zuwenden, wiederholen wir noch einmal die Lösungsansätze, die Sie in der Schule schon gelernt haben.

4.1 *Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren und Additionsverfahren*

Diese 3 Verfahren haben gemeinsam, dass sie sich mit jeweils 2 Gleichungen und 2 Unbekannten beschäftigen.

4.1.1 Einsetzungsverfahren

Wir haben die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\cdot x + 3\cdot y &= 5 \\ 1\cdot x + 2\cdot y &= 3 \end{aligned}$$

wir formen die zweite Gleichung um

$$x = 3 - 2\cdot y$$

und setzen das x in die erste Gleichung ein:

$$2\cdot(3 - 2\cdot y) + 3\cdot y = 5$$
$$6 - 4\cdot y + 3\cdot y = 5$$
...
$$y = 1$$

nach y rechnen wir auch noch x aus:

$$x = 3 - 2\cdot 1 = 1$$

Dies ist das Einsetzungsverfahren.

4.1.2 Gleichsetzungsverfahren

Das zweite, mit dem wir uns im 2. Kapitel schon beschäftigt haben, geht so:

Wieder haben wir zwei Gleichungen

$$\begin{array}{lllll} 1\cdot x & + & 3\cdot y & = & 4 \\ 1\cdot x & + & 2\cdot y & = & 3 \end{array}$$

Diesmal formen wir beide um

$$\begin{array}{lllll} x & = & 4 & - & 3\cdot y \\ x & = & 3 & - & 2\cdot y \end{array}$$

und wir setzen die beiden rechten Seiten gleich, weil beide = x sind

$$\begin{array}{rcl} 4 - 3\cdot y & = & 3 - 2\cdot y \quad | \quad -3 + 3\cdot y \\ 1 & = & y \end{array}$$

Wir setzen den Wert von y in eine der beiden Gleichungen ein und bekommen
$x = 1$

4.1.3 Additionsverfahren

Bei diesem Verfahren werfen wir eine der beiden Unbekannten aus dem System hinaus, indem wir die beiden Gleichungen addieren (oder, wenn diese bequemer ist, subtrahieren):

$$\begin{array}{llll} 1\cdot x & +2\cdot y & = & 3 \\ 1\cdot x & -2\cdot y & = & -1 \end{array}$$

Wir addieren die beiden Gleichungen und bekommen
$2\cdot x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

und wieder setzen wir das Ergebnis in eine der beiden Ausgangsgleichungen ein und bekommen
$y = 1$

4.2 Matrizen und Gauß-Verfahren

Während die Verfahren, die wir uns bisher angeschaut haben, an der Schule schon in der Mittelstufe gelehrt werden, schauen wir uns nun ein etwas systematischeres Vorgehen an, das prinzipiell unabhängig davon funktioniert, wie viele Gleichungen und Unbekannte wir haben.

4.3 Warum Matrizen? Übergangsmatrizen

Nehmen wir an, ein Supermarkt mit 3 Filialen in einer Region will seine Kundenwanderungen untersuchen. Eine Kundenbefragung kommt zu folgendem Ergebnis:

1. 80% der Kunden von Filiale 1 besuchen in der Folgewoche die gleiche Filiale. 10% gehen zu Filiale 2 and 10% gehen zu Filiale 3.
2. 90% der Kunden von Filiale 2 besucht in der Folgewoche die gleiche Filiale. 7% gehen zu Filiale 1 and 3% gehen zu Filiale 3.
3. 80% der Kunden von Filiale 3 besuchen in der Folgewoche die gleiche Filiale.. 15% gehen zu Filiale 2 and 5% gehen zu Filiale 1.

4. Wir schreiben all diese Zahlen in ein Schema, die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.07 & 0.05 \\ 0.1 & 0.9 & 0.15 \\ 0.1 & 0.03 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Eine solche Matrix mit Prozentzahlen, die Änderungen beschreiben, heißt Übergangsmatrix.

Wenn wir nun die Anzahl der Kunden in den Filialen in der einen Woche kennen, können wir die Anzahl in der nächsten Woche vorhersagen, indem wir diese Anzahl mit der jeweiligen Prozentzahl multiplizieren und die so erhaltenen Anzahlen addieren. Wenn die Anzahl z.B. in der einen Woche

$$\begin{pmatrix} 4000 \\ 3500 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

ist, ist das Ergebnis der nächsten Woche:

$$\begin{pmatrix} 0.8 \cdot 4000 + 0.07 \cdot 3500 + 0.05 \cdot 2000 \\ 0.1 \cdot 4000 + 0.9 \cdot 3500 + 0.15 \cdot 2000 \\ 0.1 \cdot 4000 + 0.03 \cdot 3500 + 0.8 \cdot 2000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3545 \\ 3850 \\ 2105 \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren also jeden Wert einer Zeile der Matrix mit dem entsprechenden Spaltenwert, der die Anzahl der Kunden angibt, und addieren die Werte, die wir so erhalten. Wir nennen diese Art zu rechnen, auch eine Multiplikation und zwar ist es die Multiplikation „Zeile mal Spalte".

Mit diesem Verfahren können wir nicht nur die Werte der Folgewoche, sondern auch die Werte der vorigen Woche berechnen. Bevor wir schauen, wie das geht, kehren wir aber nun zurück zu unseren linearen Gleichungssystemen und formulieren sie in der Matrix-Schreibweise:

4.4 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Schauen wir uns einmal dieses System von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten an:

$$\begin{array}{ccccccc} 1\cdot x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & 1 \\ 2\cdot x_1 & + & 4\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & 2 \\ 2\cdot x_1 & - & 1\cdot x_2 & + & 1\cdot x_3 & = & 0 \end{array}$$

Indem wir dieses System als Matrix aufschreiben, sparen wir uns, wieder und wieder die Symbole x_1, x_2, x_3 zu schreiben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Dies ist die „erweiterte Koeffizientenmatrix“, die das System beschreibt. „Erweitert“ meint, dass wir die Lösungsspalte abgesetzt mit einem senkrechten Strich zu den Koeffizienten hinzugeschrieben haben.

Nun können wir mit unserer Matrix folgende Operationen durchführen, ohne die Lösungsmenge des Systems zu ändern:

I) Wir können eine Zeile mit einem Faktor multiplizieren.

II) Wir können Zeilen vertauschen.

III) Wir können ein Vielfaches einer Zeile zu einer Zeile addieren oder von ihr subtrahieren.

(Wenn wir uns die merken, welche Spalten wir vertauschen, geht das auch, aber da jede Spalte für eine Unbekannte steht, braucht man dafür eine gute „Buchhaltung“, um dabei nicht durcheinanderzukommen und am Ende die Unbekannten zu verwechseln. Daher lasse ich die Spaltenvertauschung hier aus.)

Mit diesen Operationen können wir nun die Matrix soweit vereinfachen, dass wir die Lösung schließlich auf der rechten Seite ablesen können.

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ II-2\cdot I \\ III-2\cdot I \end{array}$$

Zunächst wollen wir eine "1" in der ersten Zeile und ersten Spalte und eine „0“ in allen anderen Zeilen der ersten Spalte.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -2 \end{array}\right) \; II\cdot(-1),\, II \Leftrightarrow III$$

Die zweite Zeile bedeutet schließlich $-1\cdot x_3 = 0$, und daher haben wir sie lieber in der dritten Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} I-2\cdot III \\ II+3\cdot III \end{array}$$

Das Ergebnis für x_3 kennen wir nun schon. Es ist 0.

Wir addieren vielfache der 3. Zeile zu der 2. und 1. Zeile und bekommen so in der dritten Spalte auch „0“en.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \; II \div (-5)$$

Jetzt können wir auch schon x_2 in der zweiten Spalte ablesen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \; I-2\cdot II$$

Nach diesem letzten Schritt steht unsere Lösung nun ganz einfach in der Spalte ganz rechts:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Und zwar: $x_1=\frac{1}{5,} x_2=\frac{2}{5,} x_3=0$.

Links von der senkrechten Linie haben wir nun die spezielle Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und dadurch können wir rechts die Lösung ablesen:

$$\begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix – mit "1" in der "**Hauptdiagonalen**" und "0" überall sonst – ist so wichtig, dass sie an dieser Stelle einen Namen bekommt, es ist die „Einheitsmatrix“.

Es sieht so aus, als hätten wir ein Verfahren gefunden, um an eine eindeutige Lösung von linearen Gleichungssystemen zu kommen. Aber schauen wir uns ein zweites, ähnliches Beispiel an:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-2\cdot I \\ III-3\cdot I \end{array}$$

Wieder beschaffen wir uns die 0en in der ersten Spalte.....

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III-II \end{array}$$

Was ist das? Die zweite Zeile bedeutet $-1\cdot x_3=0$ und die dritte Zeile bedeutet $-1\cdot x_3=-3$!

Ist das möglich?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Spätestens hier sehen wir, dass das gar nicht geht.

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -3$$

Wir haben hier also ein lineares Gleichungssystem, das überhaupt keine Lösung hat Und dass das auch passieren kann, müssen wir uns merken. Wenn solch ein Fall bei einer Ihrer Übungsaufgaben auftritt, schreiben Sie

$$L \quad = \quad \emptyset \quad \text{or} \quad L = \{\}$$

Hinweis: Ein lineares Gleichungssystem kann auch gar keine Lösung haben. Eine entsprechende Aufgabe hat dennoch eine Lösung, in diesem Fall schreibt man einfach auf, dass die Lösungsmenge leer ist.

Nun verändern wir das letzte Beispiel noch einmal etwas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - 2 \cdot I \\ III - 3 \cdot I \end{array}$$

In diesem Fall bekommen wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \end{array}$$

hier sind die zweite und die dritte Zeile also völlig identisch. Wenn wir sie voneinander subtrahieren, bekommen wir diesmal

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und die dritte Zeile bedeutet nun

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = \ 0$$

und das stimmt offensichtlich einfach immer. In diesem Fall haben wir unendlich viele Lösungen. Um die Lösungsmenge aufzuschreiben, können wir beispielsweise x_2 auswählen. (Genauso gut könnten wir in diesem Fall x_1 wählen, mit x_3 geht das aber nicht, da die zweite Zeile bedeutet:

$$-1 \cdot x_3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_3 = 0$$

und so ist der Wert vorgeschrieben und man kann da nichts mehr wählen. Wir wählen also x_2 und bekommen:

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 1 \\
&x_1 = 1 - 2 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 \qquad (x_3 = 0) \\
&x_1 = 1 - 2 \cdot x_2
\end{aligned}$$

So haben wir eine Lösungsmenge, die von x_2 abhängt:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - 2 \cdot x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Hinweis: Ein lineares Gleichungssystem kann auch unendlich viele Lösungen haben. In diesem Fall wählen wir eine oder mehrere Unbekannte beliebig und schreiben auf, wie man die anderen Unbekannten aus den gewählten berechnet.

Ein letztes Beispiel verdeutlicht, was „eine oder mehrere“ bedeutet:

$$\begin{array}{cl}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 3 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ II - 2 \cdot I \\ III - 3 \cdot I \end{array}
\end{array}$$

wir bekommen also diesmal

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Da wir 2 Zeilen haben, die komplett aus 0en bestehen, wählen wir x_2 and x_3 :

$$L=\left\{ \begin{pmatrix} 1-2\cdot x_2-2\cdot x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2\in\mathbb{R}, x_3\in\mathbb{R} \right\}$$

4.5 Was ist eine Matrix und was ein Vektor?

Unser oben beschriebenes Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen – das Gauß-Verfahren – führte uns zum Konzept der "Matrix". Eine Matrix ist ein Schema von Zahlen, die in Zeilen und Spalten angeordnet sind. Allgemein kann eine Matrix n Zeilen und m Spalten haben:

$$M_{n,m} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,m} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,m} \end{pmatrix}$$

Wir nennen sie in diesem Fall **(nXm)-matrix**. Die Matrizen, die wir gerade behandelt haben, sind also 3X3-matrices. Die Menge aller (nXm)-Matrizen nennen wir $\mathbb{R}^{nxm}$.

Vielleicht haben Sie in der Schule schon gelernt, mit „Vektoren" zu rechnen. **Vectoren** Sind ein Schema von Zahlen, das in einer Spalte angeordnet ist. Die Menge aller Vektoren mit n Komponenten können wir schreiben als

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

und wir nennen diese Menge das "n-fache cartesische Produkt" von $\mathbb{R}$ .In unseren Beispielen oben finden wir Vektoren auf der rechten Seite der senkrechten Linie in der erweiterten Matrix. Auch die Anzahl der Kunden der Supermarktfilialen war ein Vektor.Vektoren schreibt man oft mit einem kleinen Pfeil obendrüber.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Wir können sehen, dass die Vektoren gerade die Matrizen mit einer Spalte sind. Vektoren sind spezielle Matrizen. Das wird uns das Leben einfacher machen, wenn wir mit beiden zu rechnen lernen.

5 Rechnen mit Matrizen und Vektoren

Um dieses Skript übersichtlich zu halten, sind die meisten Beispiele der Rechnungen im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^{3x3}$ gemacht. Die Verfahren gehen aber natürlich auch allgemein für $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^{nxm}$.

5.1 Wie man Matrizen und Vektoren multipliziert

Nachdem wir nun Matrizen und Vektoren kennengelernt haben, lassen Sie uns das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 1\cdot x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & 1 \\ 2\cdot x_1 & + & 4\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & 2 \\ 2\cdot x_1 & - & 1\cdot x_2 & + & 1\cdot x_3 & = & 0 \end{array}$$

noch einmal anschauen. Die "ZeileXSpalte"-Multiplikation erlaubt uns, das System auch so aufzuschreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zur Erinnerung: Wir mulitplizieren die jeweiligen Zeilenelemente der Matrix mit den entsprechenden Spaltenelementen des Vektors und addieren die Produkte.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3$$

Diese Art der Multiplikation - definiet für zwei Vektoren – ist das "**Punktprodukt**" oder "**Skalarprodukt**" das Sie vielleicht von der Schule kennen.Wenn wir jede Zeile der Matrix als Vektor behandeln und diese Multiplikation ausführen, bekommen wir 3 "Skalare" (= reelle Zahlen) die wir wieder in einem Vektor anordnen können. Diese Art der Multiplikation ist exakt das, was wir bei den Übergangsmatrizen gemacht haben, um die Anzahl der Kunden der Folgewoche zu berechnen.

Wenn wir $\mathbb{R}^{nxm}$ betrachten: Was ist die Bedingung dafür, dass das überhaupt geht? Sie können sehen, dass die Anzahl der Elemente einer Zeile der Matrix gleich sein muss der Anzahl der Elemente in der Spalte des rechten Vektors.

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & .. & m_{1,m} \\ .. & .. & .. \\ m_{n,1} & .. & m_{n,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix}$$

Wenn n=m ist, was bedeutet, dass unsere Matrix Element von $\mathbb{R}^{nxn}$ ist, sagen wir, die Matrix ist „n-ter Ordnung“.

5.2 Das Matrix-Produkt, die inverse Matrix

Bei einer Gleichung in $\mathbb{R}$: $a \cdot x = y$

bei der wir x ausrechnen wollen, können wir dies einfach mit dem Kehrwert von a tun: $x = a^{-1} \cdot y$

Wenn wir nun das Gleichungssystem - in $\mathbb{R}^3$ - :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

haben, wäre es doch schön, wenn wir dort auch so etwas wie einen Kehrwert der Matrix hätten. Wir müssten für unterschiedliche Werte $y_{1,} y_{2,} y_3$ das Gaußverfahren nicht immer wieder ausführen. Stattdessen könnten wir:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

umformen und müssten nur noch die Matrix mit dem Vektor multiplizieren, was viel weniger Arbeit wäre.Und die gute Nachricht ist: Genau das geht!

Dazu definieren wir zunächst eine M**atrix-Matrix-Multiplikation** – ganz einfach Zeile X Spalte, wie wir es bei den Vektoren schon gelernt haben:

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & .. & x_{1,m} \\ .. & .. & .. \\ x_{n,1} & .. & x_{n,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{1,1} & .. & y_{1,p} \\ .. & .. & .. \\ y_{m,1} & .. & y_{m,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{1,1} & .. & z_{1,p} \\ .. & .. & .. \\ z_{n,1} & .. & z_{n,p} \end{pmatrix}$$

wobei

$$z_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} x_{i,k} \cdot y_{k,j}$$

Wir erhalten das jeweilige Element der Ergebnis-Matrix, indem wir die entsprechende Zeile der linken Matrix mit der entsprechenden Spalte der rechten Matrix multiplizieren.Dazu muss natürlich wieder die Anzahl der Elemente der Zeilen der linken Matrix mit der Anzahl der Elemente der Spalten der rechten Matrix übereinstimmen.

Bevor wir uns auf die Suche nach einem Kehrwert von Matrizen machen, sollten wir wissen, was die „1“ bei den Matrizen ist (Welche Matrix ändert eine andere Matrix nicht, wenn man sie multipliziert?) Wir sehen sofort, dass das nur in $\mathbb{R}^{nxn}$ geht. Sonst würde sich durch die Multipllikation ja die Anzahl der Elemente bei der Ergebnis-Matrix geändert haben.

Die Antwort auf diese Frage im $\mathbb{R}^{nxm}$ ist die Einheitsmatrix – mit "1" in der Hauptdiagonalen und "0" überall sonst. Im $\mathbb{R}^{3x3}$ können wir leicht einsehen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} \end{pmatrix}$$

Das Symbol für diese Matrix ist $E_3 \in \mathbb{R}^{3x3}$ oder allgemein $E_n \in \mathbb{R}^{nxn}$. Sie spielt die Rolle der „1“ bei unserem neuen Rechenverfahren.

Hinweis: Für unsere neue Multiplikation gilt das **Assoziativgesetz**:

$$M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3) = (M_1 \cdot M_2) \cdot M_3$$

das wir von den reellen Zahlen schon kennen. Und auch das **Distributivgesetz**: gilt.

$$(M_1 + M_2) \cdot (M_3) = M_1 \cdot M_3 + M_2 \cdot M_3$$

wenn wir die Addition von 2 Matrizen einfach so durchführen, dass wir alle jeweiligen Komponenten addieren.

Das Kommutativgesetz gilt aber nicht! Ein Gegenbeispiel im $\mathbb{R}^{2x2}$ ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{but}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Nun schauen wir, ob bzw wann wir zu einer Matrix M eine Matrix finden für die gilt:

$$M^{-1} \cdot M = E_n \quad .$$

Wenn wir die hätten könnten wir rechnen:

$$M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix} \qquad | \quad M^{-1} \cdot \text{... von links multiplizieren}$$

$$M^{-1} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = E_n \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix}$$

Die Antwort auf diese Frage ist nun: Wir bekommen sie, wenn wir das Gaußverfahren auf die folgende erweiterte Matrix anwenden:

$$(M \mid E_n) \rightarrow (E_n \mid M^{-1})$$

Wir schauen uns das an einem Beispiel an:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-I \\ III-I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III+3\cdot II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 0.5\cdot III \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1.5 & 0.5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-III \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1.5 & 0.5 \end{array}\right) \begin{array}{l} I-2\cdot II-2\cdot III \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1.5 & 0.5 \end{array}\right)$$

Lassen Sie uns prüfen, ob das wirklich geklappt hat:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -0.5 & -0.5 \\ -2 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun können wir Gleichungssystem mittels dieser inversen Matrix lösen, statt das aufwändige Gaußverfahren wieder und wieder machen zu müssen.

Und diese inverse Matrix ist auch die Antwort auf die Frage, wie wir an die Anzahl der Kunden der letzten Woche bei unserem Beispiel kommen, wenn wir die Anzahl in dieser Woche kennen.

Wenn T die Übergangmatrix ist und $\vec{c}$ der Kundenvektor dieser Woche, dann bekommen wir mit der Rechnung $T^{-1}\cdot\vec{c}$ den Kundenvektor der letzten Woche.

Hinweis: Als letztes definieren wir noch eine **Skalarmultiplikation für Matrizen** Komponente für Komponente, so dass wir schreiben können

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -0.5 & -0.5 \\ -2 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Auf diese Weise sind Matrizenrechnungen ohne Taschenrechner manchmal sehr viel einfacher aufzuschreiben.

Wie wir oben schon gesehen haben, führt das Gaußverfahren allerdings nicht immer zur Einheitsmatrix. Nun können wir sagen, dass Matrizen, bei denen wir eine Zeile komplett mit 0en bekommen, „nicht invertierbar“ sind. Nun schauen wir uns noch einen „Schnelltest“ an, mit dem wir entscheiden können, ob eine Matrix invertierbar ist oder nicht. Der Schnelltest ist die „Determinante“.

5.3 Determinanten

Um unseren "Schnelltest" zu entwickeln, lassen Sie uns zunächst den $\mathbb{R}^{2x2}$ anschauen. Wir beginnen das Gaußverfahren mit einer abstrakten Matrix aus Symbolen. Das "a" soll dabei nicht 0 sein. Wenn es das wäre, könnten wir das mit einer Zeilenvertauschung schnell ändern. Wenn nämlich c auch noch 0 wäre, dann hätten wir eine Spalte, die nur aus 0en besteht und wüssten bereits, dass unsere Matrix nicht invertierbar ist. (Wir könnten x_1 frei wählen und hätten keine eindeutige Lösung beim Gauß-Verfahren):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \div a$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \quad II - c \cdot I$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & d - c \cdot b/a & -c/a & 1 \end{array}\right) \quad II - c \cdot I$$

Wir können nun sehen, dass unser Gauß-Verfahren mit einer 0-Zeile abbrechen würde, wenn

$$\begin{aligned} d - c\cdot\frac{b}{a} &= 0 \quad | \ \cdot a \\ \Leftrightarrow a\cdot d - c\cdot b &= 0 \end{aligned}$$

gilt. Wir können daher den Term auf der linken Seite der Gleichung als "**Determinante**" der Matrix definieren:

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\cdot d - c\cdot b$$

Wenn die Determinante 0 ist, haben wir keine oder unendlich viele Lösungen beim Gauß-Verfahren. Wenn die Determinante nicht 0 ist, haben wir eine eindeutige Lösung und unsere Matrix ist invertierbar.

Dieses Konzept können wir auf $\mathbb{R}^{nxn}$ erweitern:

5.3.1 Die Laplace-Entwicklung der Determinante

$$\text{Sei} \quad M = \begin{pmatrix} x_{1,1} & .. & x_{1,n} \\ .. & .. & .. \\ x_{n,1} & .. & x_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nxn} \quad \text{eine (nxn)-Matrix.}$$

Wenn wir von M die *i-te* Zeile und die *j-te* Spalte löschen, bekommen wir wieder eine Matrix $M_{i,j}$ der Ordnung (*n* -1). $M_{i,j}$ Sie heißt die *ij-th Streichmatrix von M*.

Um das zu verstehen, schauen wir uns das am Beispiel an:

$$M = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_{2,3} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_{2,2} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,3} \\ x_{3,1} & x_{3,3} \end{pmatrix}$$

So bekommen wir aus einer Matrix der Ordnung n, n^2 Matrizen der Ordnung n-1.

Nun können wir die Determinante einer Matrix definieren. Wir wählen dazu eine Zeile der Matrix aus. Sei i dies Zeile unserer (nxn)-matrix M. Dann ist

$$det(M) = |M| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot x_{i,j} \cdot |M_{i,j}|$$

Dasselbe können wir mit der j-ten Spalte unserer Matrix tun:

$$det(M) = |M| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot x_{i,j} \cdot |M_{i,j}|$$

Hinweis: Egal, welche Zeile oder Spalte wir für diese Rechnung wählen, wir bekommen für eine Matrix immer denselben Wert!

Die Formel und speziell das $(-1)^{i+j}$ sieht etwas kompliziert aus, aber es ist nicht so sehr schwer auszuführen. Es ist wie ein Schachbrettmuster von + and – auf unserer Matrix, mit einem + an der Position 1,1 (weil $(-1)^{1+1}=1$):

$$\begin{pmatrix} + & - & + & .. \\ - & + & - & .. \\ + & - & + & .. \\ .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

Mit dieser Definition der Determinanten gilt: Eine Matrix M der Ordnung n ist invertierbar und nur dann invertierbar, wenn $det(M) \neq 0$ gilt.

Um die Formel oben zu verstehen, ist es sicher eine gute Idee, sich das am Beispiel einer (3x3)-Matrix anzuschauen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \text{wir wählen die erste Spalte}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (3 \cdot 1 - (-1) \cdot 3) - 1 \cdot (2 \cdot 1 - (-1) \cdot 2) + 1 \cdot (2 \cdot 3 - 3 \cdot 2)$$

$$= (3 + 3) - (2 + 2) + (6 - 6)$$

$$= 2$$

Wir sehen - da 2 nicht 0 ist – dass unsere Matrix invertierbar ist.. (Wir haben Sie schon in unserem Beispiel oben invertiert).

Ein interessanter Aspekt dieser "Laplace-Entwicklung" ist, dass wir frei sind, welche Zeile oder Spalte wir zur Entwicklung wählen.Im Beispiel oben spielte es keine Rolle, welche Zeile oder Spalte wir wählen. Wenn wir uns aber diese Matrix anschauen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wenn wir hier die dritte Spalte wählen, sparen wir einiges an Rechenarbeit.Wegen der 0en in dieser Spalte reicht diesmal eine Unterdeterminante aus, da die anderen beiden ja mit 0 multipliziert werden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left(0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right) + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = -1$$

Hinweis:Bei der Berechnung von Determinanten spart es eine Menge Zeit und Arbeit, die Zeile oder Spalte mit der maximal möglichen Anzahl 0en zu wählen.

Ein weiterer Aspekt dieser Strategie: Wenn unsere Matrix in "**Dreiecksform**" ist, können wir die Determinante sehr schnell rechnen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

(Entwickeln Sie einfach nach der ersten Spalte...)

5.4 Cramers Regel

Wir können nun Determinanten berechnen und sie benutzen, um zu prüfen, ob lineare Gleichungssysteme eindeutig lösbar bzw. Matrizen invertierbar sind. Die Determinanten können aber auch noch etwas mehr: Mit ihnen kann man auch alternativ zum Gaußverfahren die Lösungen von linearen Gleichungssystemen berechnen. Dieses Verfahren heißt „Cramers Regel“.

Sei $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & .. & m_{1,n} \\ .. & .. & .. \\ m_{n,1} & .. & m_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nxn}$ eine (nxn)-matrix mit $det(M) \neq 0$.

Dann hat das Gleichungssystem

$M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix}$ eine eindeutige Lösung, die wir mit

$$x_j = \frac{1}{det(M)} \cdot det \begin{pmatrix} m_{1,1} & .. & m_{1,j-1} & y_1 & m_{1,j+1} & .. & m_{1,n} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ m_{n,1} & .. & m_{n,j-1} & y_n & m_{n,j+1} & .. & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

ausrechnen können. Wir können unser Gleichungssystem also lösen, indem wir (n+1) Determinanten berechnen: Wir ersetzen jeweils die j-te Spalte von M durch die Werte von **y** und bekommen den Wert x_j , indem wir die Determinante dieser Matrix durch die Determinante der Ausgangsmatrix M dividieren.

An unserem Beispiel oben wollen wir schauen, wie das geht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dass det(M) = 2 ist, wissen wir ja schon.(siehe oben).

Wir bekommen also unsere Lösung durch:

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (3 - (-1) \cdot 3) = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot (1 - 3) = -\frac{-2}{2} = 1$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (-1 - 3) = \frac{-4}{2} = -2$$

So haben wir nun also auch noch ein Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen, das nur auf Determinanten basiert.

5.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Das Konzept der Eigenwerte werden Sie an der Schule noch nicht kennengelernt haben. Einen Sonderfall lernen deutsche Schüler bei den Übergangsmatrizen.

5.5.1 Ein Beispiel

Die Kunden dreier Tankstellen A, B, C in einer Region werden sich bei ihrem nächste Besuch so aufteilen:

Kunden von A:	50% werden bei A tanken, 25% tanken bei B, 25% tanken bei C.
Kunden von B:	25% werden bei A tanken, 50% tanken bei B, 25% tanken bei C.
Kunden von C:	20% werden bei A tanken, 80% tanken bei C.

(Das Beispiel ist aus dem Schulbuch "Lambacher Schweizer"[3])

Wir schreiben die Situation als Matrix auf:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}^{next}$$

Wir haben also wieder eine Übergangsmatrix wie schon oben beschrieben. Der springende Punkt ist dieses Mal: Gibt es einen stabilen Zustand, bei dem die Verteilung der Kunden konstant bleibt? Das heißt, gibt es einen Kundenvektor $\vec{x}$, für den $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$ gilt? Einen solchen Vektor gibt es sicherlich: Der Vektor mit 0 an jeder Position – der $\vec{0}$. Der ist aber natürlich nicht sehr interessant. Wenn wir keine Kunden haben, brauchen wir unsere Tankstellen nicht offenhalten und es lohnt sich nicht, weiterzurechnen.

Lassen Sie uns schauen, wie man an einen solchen Vektor, der nicht der 0-Vektor ist, kommt:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad | \quad -\vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad | \quad \text{Die Einheitsmatrix ändert Vektoren nicht}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad | \quad \textit{Distributivgesetz}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5-1 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5-1 & 0.25 \\ 0.2 & 0 & 0.8-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Wir suchen also ein $\vec{x} \neq \vec{0}$, das diese Gleichung löst. Da $\vec{0}$ eine Lösung ist, können wir sicher sein, dass unser Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar ist. Wir können also einfach prüfen, ob die Determinante der Matrix 0 ist. Wenn nämlich $det(M - E_n) \neq 0$ wäre, wäre $\vec{0}$ die einzige Lösung.

$$det(..) = 0.2 \cdot \begin{vmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.5-1 & 0.25 \end{vmatrix} - 0.2 \cdot \begin{vmatrix} 0.5-1 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5-1 \end{vmatrix}$$

$$= 0.2 \cdot (0.0625 + 0.125) - 0.2 \cdot (0.25 - 0.0625)$$

$$= 0.2 \cdot 0.1875 - 0.2 \cdot 0.1875 = 0$$

Die Determinante ist 0, also können wir uns auf die Suche nach den Lösungen machen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0.5 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 0.25 & 0 \\ 0.2 & 0 & -0.2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III \cdot 5, \textit{vertauschen mit } I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 0.25 & 0 \\ -0.5 & 0.25 & 0.25 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{II - 0.25 I} \\ III + 0.5 \cdot I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.25 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \cdot II \\ 4 \cdot III \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \end{array}$$

In diesem Fall können wir also x_3 frei wählen und erhalten:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Wir können erkennen: Jede Verteilung, in der die 3 Tankstellen die gleiche Anzahl Kunden haben, wird stabil sein. Das führt uns zu einer neuen Definition: Der Wert 1 in der Gleichung

$$M \cdot \vec{x} \;=\; 1 \cdot \vec{x}$$

heißt **Eigenwert** der Matrix. Jeder Vektor $\vec{x} \in L \setminus \{\vec{0}\}$ heißt **Eigenvektor**. Zum Beispiel ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein solcher Eigenvektor. Die Theorie der Eigenwerte und Eigenvektoren ist ein wichtiger Teilbereich der Matrizen. Neben anderem führt sie zu einem schnellen Verfahren, um höhere Potenzen von Matrizen M^p zu berechnen.

5.5.2 Eigenvektoren und Eigenwerte im allgemeinen

Wenn eine (nxn)-matrix M gegeben ist, ein Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ und eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, die die Gleichung

$$M \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

erfüllt, dann sagen wir, dass λ ein **Eigenwert** der Matrix M ist und $\vec{x}$ ist ein **Eigenvektor** der Matrix M zum Eigenwert λ.

Wie wir diese Werte berechnen können, haben wir oben gesehen:

Wir subtrahieren λ von allen Hauptdiagonalelementen der Matrix. Wir setzen dann die Determinante dieser neuen Matrix zu 0. Die 0-Stellen dieser Gleichung sind die Eigenwerte.

Um zu jedem Eigenwert die Eigenvektoren zu bekommen, erzeugen wir eine Matrix, indem wir von der Ausgangsmatrix in der Hauptdiagonale den jeweiligen Eigenwert abziehen.

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} m_{1,1}-\lambda & m_{1,2} & .. & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2}-\lambda & .. & m_{2,n} \\ .. & .. & .. & .. \\ m_{n,1} & m_{n,2}-\lambda & .. & m_{n,n}-\lambda \end{pmatrix}$$

Nun suchen wir mit den inzwischen bekannten Mitteln (Gauß-Verfahren) nach Vektoren $\vec{x} \neq \vec{0}$ die die Gleichung

$$M_\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

erfüllen.

Hier ein Beispiel des Verfahrens mit einer (3x3)-matrix:

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad | \quad \lambda \textit{ wird von der Hauptdiagonalen subtrahiert}$$

$$\begin{pmatrix} -7-\lambda & 0 & 6 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \quad | \quad \textit{Wir entwickeln die Determinante nach der } 2\text{ten } \textit{Zeile , und setzen sie zu } 0$$

$$(5-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -7-\lambda & 6 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)\cdot((-7-\lambda)\cdot(2-\lambda)-36)$$

$$= (5-\lambda)\cdot(\lambda^2-2\cdot\lambda+7\cdot\lambda-14-36)$$

$$= (5-\lambda)\cdot(\lambda^2+5\cdot\lambda-50) \quad | \quad \textit{z.B. mit } pq-\textit{Formel}$$

$$= (5-\lambda)\cdot(5-\lambda)\cdot(-10-\lambda)$$

Wir haben zwei Eigenwerte gefunden: $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = -10.$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert 5:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -12 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} I \div (-6) \\ \\ III \div 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir können $x_{2,} x_3$ frei wählen und bekommen $x_1 = \frac{1}{2}\cdot x_3$. Mögliche Eigenvektoren sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Nun die Eigenvektoren zum Eigenwert -10

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 12 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} I \div (3) \\ II \div 15 \\ III - 2 \cdot I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hier muss x_2 0 sein, um die 2. Gleichung zu erfüllen.. Wir können x_3 wählen und erhalten $x_1 = -2 \cdot x_3$. Ein Beispiel für einen Eigenvektor zum Eigenwert -10 ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit verlassen wir das Thema Matrizen und kommen nun zum anderen großen Bereich der Mathematik, der „Analysis“, in der es um „Funktionen“ geht und die uns zur Differential- und Integralrechnung führt.