3 Gleichungen und Ungleichungen

3.1 Das Sigma-Zeichen – wie wir Summen aufschreiben

Es ist kein Problem, wenn wir 3 Zahlen addieren sollen, zu schreiben:

$$1 + 2 + 3$$

Aber was ist, wenn wir die Summe der ersten 50 natürlichen Zahlen aufschreiben sollen? Ein erster, intuitiver Ansatz ist, Punkte zu verwenden:

$$1 + 2 + ... + 50 \quad .$$

In dem Fall funktioniert das auch wunderbar. Aber vielleicht wollen wir auch die ersten 50 **ungeraden** Zahlen aufschreiben.? Oder die ersten 50 Primzahlen? Da können wir Fälle bekommen, bei denen wir mit den Pünktchen nicht mehr genau wissen, was gemeint ist. Daher gibt es in der Mathematik das Summenzeichen.

Die Summe der ersten 50 Zahlen :

$$\sum_{i=1}^{50} i = 1 + ... + 50$$

die geraden natürlichen Zahlen bis 50

$$\sum_{i=1}^{25} 2 \cdot i = 2 + 4 + ... + 50$$

die ungeraden natürlichen Zahlen bis 50

$$\sum_{i=0}^{24} (2 \cdot i + 1) = 1 + 3 + ... + 49$$

3.2 Gleichungen

Im 16. Jahrhundert schrieb ein englischer Arzt - Robert Recorde – Bücher über mathematische Themen. Unter anderem brachte er die arabischen Ziffern nach England. Er – und sein Setzer -hatten dabei das Problem, dass in diesen Bücher sehr oft der Text „is equal“ („ist gleich“) vorkam. So ersetzten sie diesen Text durch zwei waagerechte Striche und

=

das Gleichheitszeichen war geboren..

Gleichungen zu lösen – manchmal exakt und manchmal näherungsweise, ist ein mächtiges Werkzeug, um Probleme zu lesen, die für Menschen bedeutungsvoll sind. Wenn Sie z.B. ein Rechenmeister des 15. Jahrhunderts wären und die richtigen quadratischen Gleichungen lösen konnten, dann konnten Sie den Flug der Kanonenkugeln vorausberechnen. So konnten die Kanonen Ihres Fürsten richtig ausgerichtet werden und trafen mit viel höherer Wahrscheinlichkeit den Pulverturm der Stadt. Natürlich entlohnte der jeweilige Fürst Rechenmeister, die das konnten, entsprechend. Eine Stadt zu belagern hieß übrigens im englsichen „to invest a town“, so dass wir sehen können, was das Wort „Investition“ ursprünglich meinte.

Sie erinnern sich sicher, dass wir Gleichungen lösen, indem wir „auf beiden Seiten der Gleichung das Gleiche tun“ und zwar jeweils "das Gegenteil von dem, was wir sehen". Ein Beispiel:

$$\begin{aligned} 3\cdot x + 7 &= 19 \quad | \quad -7 \\ &\quad wir\,sehen + 7, also - 7 \\ 3\cdot x &= 12 \quad | \quad \div 3 \\ &\quad wir\,sehen\,3\cdot, also \div 3 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Oft wird die Waage als Metapher für diese Strategie verwendet. Mit ihr formen wir die Gleichung um, bis wir die Lögung für unsere Unbekannte ablesen können..

3.2.1 Äquivalenz- und Nicht-äquivalenz-Umformungen

Bei linearen Gleichungen (bei denen nur die Operationen $+, -, \cdot$ aufzulösen sind, gibt es fast kein Problem, an unsere Lösung zu kommen. (Solange wir vermeiden, beide Seiten der Gleichung mit 0 zu multiplizieren.) Schauen wir uns aber ein Beispiel mit Quadratwurzeln an:

$$\sqrt{x-2} - 1 - \sqrt{3-x} = 0$$

$$\sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{3-x} \quad | \quad (...)^2$$

$$x - 2 = 1 + 2\cdot\sqrt{3-x} + 3 - x \quad | \quad -4 + x$$

$$2\cdot x - 6 = 2\cdot\sqrt{3-x} \quad | \quad \div 2$$

$$x - 3 = \sqrt{3-x} \quad | \quad (...)^2$$

$$x^2 - 6\cdot x + 9 = 3 - x \quad | \quad + x - 3$$

$$x^2 - 5\cdot x + 6 = 0 \quad | \quad pq-Formel....$$

$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}$$

$$x_1 = 3, x_2 = 2$$

Das sieht gut aus, aber lassen Sie uns testen, ob unsere „Lösungen die Ausgangsgleichung erfüllen:

$$\sqrt{3-2} - 1 - \sqrt{3-3} = 1 - 1 - 0 = 0 \quad | \quad OK$$

$$\sqrt{2-2} - 1 - \sqrt{3-2} = 0 - 1 - 1 = 0 \quad | \quad ???$$

Eine unserer Lösungen - 3 – löst die Gleichung wirklich, die andere Lösung aber führt zu einem falschen Ergebnis. So kommen wir zum Begriff der „Äquivalenzumformungen“. Das sind die, die wir auch rückwärts durchführen könnten. Diese Umformungen sind mit einem $\Leftrightarrow$ gekennzeichnet, die anderen mit einem $\Rightarrow$. Wie wir jetzt gesehen haben – das Quadrieren beider Seiten einer Gleichung ist keine Äquivalenzumformung. Wenn wir diese Zeichen im Beispiel oben ergänzen:

$$\sqrt{x-2} - 1 - \sqrt{3-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{3-x} \qquad | \ (...)^2$$

$$\Rightarrow x - 2 = 1 + 2\cdot\sqrt{3-x} + 3 - x \qquad | \ -4 + x$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot x - 6 = 2\cdot\sqrt{3-x} \qquad | \ \div 2$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = \sqrt{3-x} \qquad | \ (...)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 6\cdot x + 9 = 3 - x \qquad | \ + x - 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5\cdot x + 6 = 0 \qquad | \ pq-formula....$$

$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}$$

$$x_1 = 3, x_2 = 2$$

Note: Wenn wir Gleichungen lösen, nutzen wir auch Nicht-Äquivalenz-Umformungen. Wir müssen dies auch manchmal tun, um an die Lösungen zu kommen. In diesem Fall müssen wir aber am Ende wie im Beispiel oben testen, ob unsere Lösungen wirklich in die Ausgangsgleichung passen und nur Kandidaten, die das tun, sind wirklich Lösungen der Gleichung.

3.3 Ungleichungen

Manchmal sind die Informationen, die wir über eine Sache haben, nicht präzise genug, um das Gleichheitszeichen zu benutzen. Wir haben aber eine Information über eine Einschränkung, zum Beispiel: "Wir können maximal 100.000 € maximal ausgeben“ Wenn wir dann z.B. von diesem Geld zwei Artikel kaufen, die jeweils einen Preis A und B haben, bekommen wir eine Ungleichung:

$$x \cdot A \ + \ y \cdot B \quad \leqslant \quad 100.000\,€$$

In der Ökonomie gibt es manchmal direkt eine ganze Reihe von solchen Ungleichungen und die Aufgabe, unter den Restriktionen den Punkt mit dem maximalen Profit zu finden. Diese Aufgabe heißt dann „lineare Optimierung“ und Sie sehen, es kann sinnvoll sein, sich etwas mit diesen Ungleichungen auszukennen.

Ungleichungen zu behandeln ist sehr ähnlich zum Umgang mit Gleichungen, es gibt aber einen wichtigen Unterschied: Wenn wir beide Seiten einer Gleichung mit derselben Zahl multiplizieren oder dividieren und diese Zahl kleiner als 0 ist, dann dreht sich das Ungleichheitszeichen um. Wenn unser Faktor größer als 0 ist, passiert das nicht.

$$\begin{array}{rcrcrl} -3\cdot x & + & 14 & \leqslant & 2 & \mid\ -14 \\ -3\cdot x & & & \leqslant & -12 & \mid\ \div(-3) \\ x & & & \geqslant & 4 & \end{array}$$

3.4 Lineare Gleichungen

Einfache Probleme, oft aus der Ökonomie, können mit linearen Gleichungen beschrieben werden:

"Wie viele Teile eines Artikels können wir kaufen, wenn ein Teil 3€ kostet und wir 24€ zur Verfügung habenl?" Natürlich ist die Lösung

$$\begin{array}{rcll} 3\cdot x & = & 24 & \mid\ \div 3 \\ x & = & 8 & \end{array}$$

Ein weiteres, etwas komplizierteres Beispiel: "Wir produzieren einen Artikel zu Kosten von 4€ pro Stück und haben zusätzlich 100€ Fixkosten. Wie viele Teile müssen wir zu 5,50€

verkaufen, um einen Gewinn zu machen?"

$$\begin{array}{rcll} 4\cdot x + 100 & = & 5.50\cdot x & \mid -4\cdot x \\ 100 & = & 1.5\cdot x & \mid \div 1.5 \\ 66.66.. & = & x & \end{array}$$

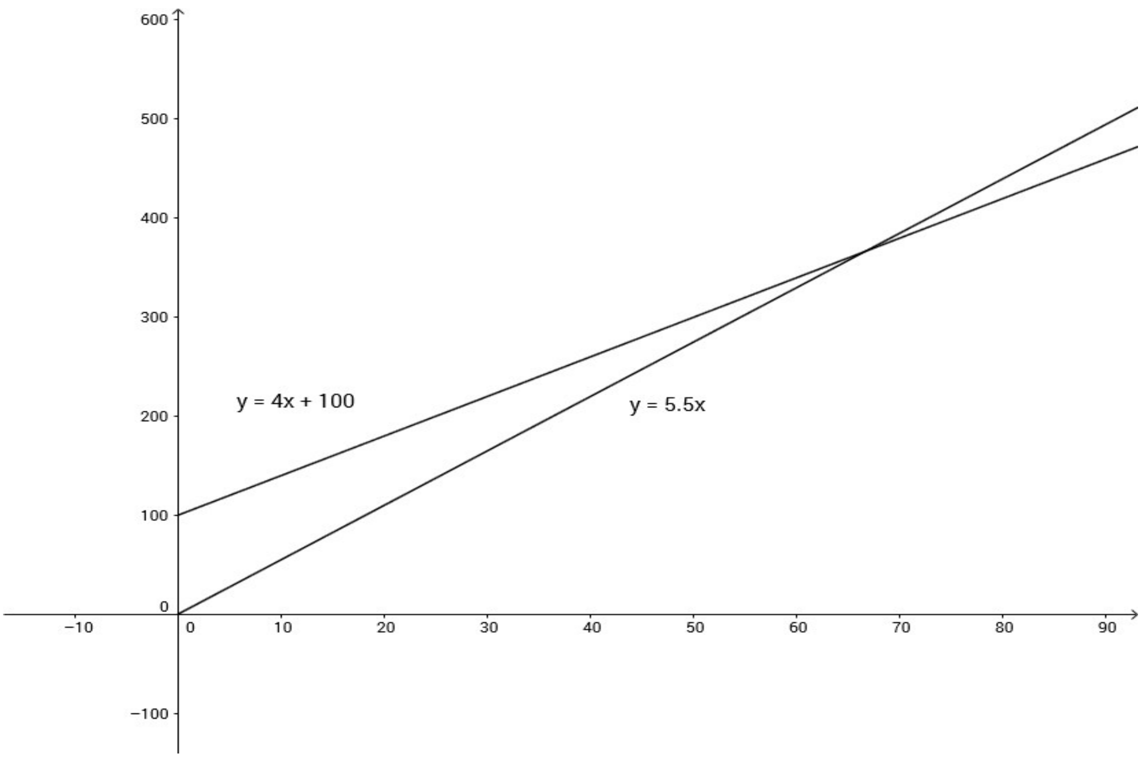
Die Kosten sind hier durch eine Gerade beschrieben

$$4\cdot x + 100 = y$$

und die Einnahmen sind durch eine weitere Gerade beschrieben

$$5.5\cdot x = y$$

Und durch unsere Rechnung haben wir den Schnittpunkt der beiden Geraden gefunden.

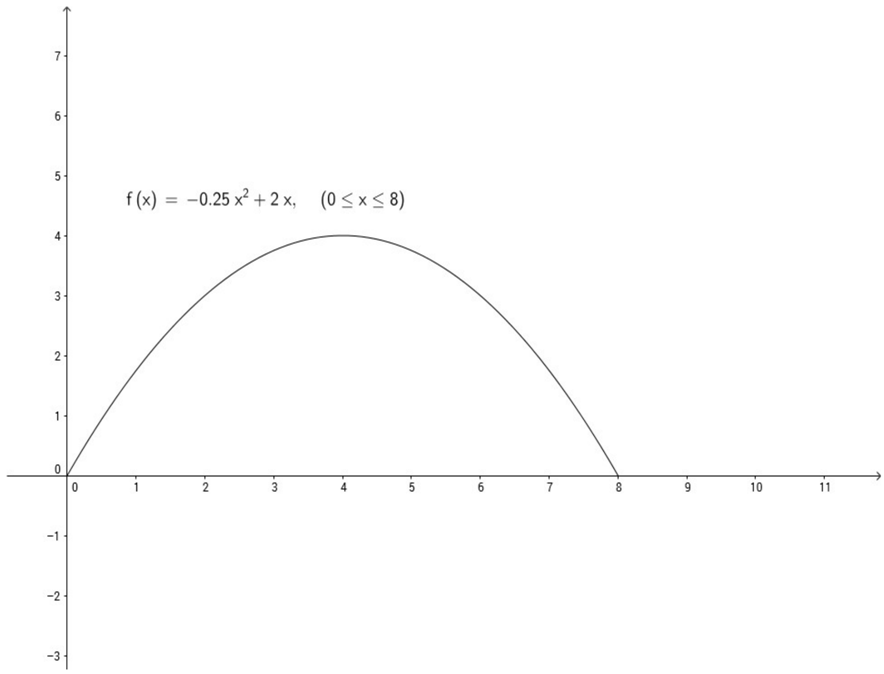


Ähnlich ist es, wenn wir zwei Handyverträge vergleichen wollen. Der eine hat eine Grundgebühr von 7€ und kostet 10ct pro Minute, der andere kostet 10€ fix and 5ct pro Minute.

Wenn Sie mögen, lösen Sie das Problem mit dem Ansatz der linearen Gleichungen!

3.5 Quadratische Gleichungen

Wie schon erwähnt, sind quadratische Gleichungen ein wunderbares Mittel, um den Flug von Kanonenkugeln vorherzusagen. So kam diese Aufgabe in unser Leben und anschließend ergab sich, dass, diese Gleichungen auch in anderen Bereichen der Physik recht nützlich sein können. Im Weg-Zeit-Gesetz, das sich aus Newtons Gravitationsgesetz ergibt, kommen quadratische Terme vor:



Die meisten deutschen Schüler haben gelernt, zum Lösen von quadratischen Gleichungen die p/q-Formel zu benutzen:

Um die Gleichung

$$x^2 + p\cdot x + q = 0$$

zu lösen, rechnen wir:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

(Vielleicht haben Sie stattdessen auch die „Mitternachtsformel“ gelernt, um die Gleichung

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$$

zu lösen, aber diese Formel ist eigentlich unnötig komplex und es ist einfacher, diese Gleichung durch a zu teilen und dann die p/q-Formel zu benutzen.)

Hier ein Beispiel, wie das mit der p/q-Formel geht:

$$\begin{array}{lllllll} 2\cdot x^2 & = & 4\cdot x & + & 6 & & \mid \ -4\cdot x \ \ -6 \\ 2\cdot x^2 & - & 4\cdot x & - & 6 & = 0 & \mid \ \div 2 \\ x^2 & - & 2\cdot x & - & 3 & = 0 & \end{array}$$

Nun wenden wir die Formel an:

$$x_{1,2} = -\frac{(-2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-3)} = 1 \pm \sqrt{4}$$

$$x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = -1$$

Aber warum bekommen wir mit dieser Formel überhaupt die richtige Lösung? Um dies zu verstehen, schauen wir uns einen Ansatz an, der „quadratische Ergänzung“ heißt und den Sie vermutlich auch in der Schule gezeigt bekommen haben:

Im ersten einfachen Fall sehen wir eine erste binomische Formel:

$$\begin{array}{lll} x^2 + 2\cdot x + 1 & = 0 & \mid \ \text{die 1. binomische Formel erkennen...} \\ (x+1)^2 & = 0 & \mid \ \sqrt{(...)} \\ x & = -1 & \end{array}$$

Unser zweiter Fall ist ein wenig komplexer:

$$\begin{array}{lll} x^2 + 2\cdot x - 3 & = 0 & \mid \ \text{wir erkennen die 1. binomische Formel dennoch...} \\ x^2 + 2\cdot x + 1 - 4 & = 0 & \mid \ \text{+1 - 4 = -3} \\ (x+1)^2 - 4 & = 0 & \mid \ + \ 4 \\ (x+1)^2 & = 4 & \mid \ \sqrt{(...)}\text{, Vorsicht, hier gibt es zwei Lösungen!} \\ (x+1) & = \pm 2 & \mid \ -1 \end{array}$$

$$x_1 = -1 + 2 = 1 \quad , \quad x_2 = -1 - 2 = -3$$

Vielleicht denken Sie, das ist eine Menge überflüssiger Arbeit, um das Problem zu lösen, aber Vorsicht: In der Integralrechnung werden Sie die „Partialbrüche“ kennenlernen, und in diesem Zusammenhang werden Sie die Fähigkeit zur quadratischen Ergänzung benötigen. Die p/q-Formel wird dann nicht helfen! Daher wiederholen wir die quadratische Ergänzung an dieser Stelle schon, damit Sie es dann einfacher haben.

Nachdem wir die quadratische Ergänzung mit konkreten Zahlen kennengelernt haben, schauen wir Sie uns jetzt noch einmal mit den abstrakten p und q an und werden sehen, dass mit der quadratischen Ergänzung die p/q-Formel herauskommt:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$
$$x^2 + 2 \cdot \left(\frac{p}{2}\right) x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \quad \Big| \; +\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$
$$x^2 + 2 \cdot \left(\frac{p}{2}\right) x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad \Big| \; \text{1. Binomische Formel}$$
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad \Big| \; \sqrt{(\ldots)}, \text{ Vorsicht, zwei Lösungen!}$$

(Erinnern Sie sich, sie können keine Wurzen von negativen Zahlen in $\mathbb{R}$ ziehen!)

$$\left(x + \frac{p}{2}\right) = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \Big| \; -\frac{p}{2}$$
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

So ist die p/q-Formel also eigentlich eine Abkürzung der quadratischen Ergänzung in dem Fall, dass man 0-Stellen von quadratischen Gleichungen sucht. Und wenn wir dieses Verfahren beherrschen und die p/q-Formel vergessen haben, können wir sie schnell wieder herleiten. Dazu kommt, dass wir mit der quadratischen Ergänzung Aufgaben lösen können, bei denen uns die p/q-Formel nicht hilft. In der Übung werden Sie die „Scheitelpunktsform“ von quadratischen Funktionen kennenlernen, die Sie auch mit diesem Verfahren herausbekommen.

3.6 Gleichungen höheren Grades, Polynomdivision

Wir haben in der Schule gelernt, quadratische Gleichungen zu lösen. Was ist aber, wenn unsere Gleichung nicht nur einen quadratischen Term hat, sondern z.B. noch einen „kubischen“:

$$x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6 = 0$$

Für solche kubischen Gleichungen könnte man noch eine Formel analog zur p/q-Formel aufstellen, aber die ist kompliziert und schwer zu merken. Daher schauen wir uns hier einen anderen Ansatz an. Als erstes raten wir eine Nullstelle: Ist es 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4....? In unserem Fall sehen wir, dass 0 zwar keine Lösung ist, aber

$$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0$$

Sie haben vermutlich die Polynomdivision in der Schule gelernt, und genau die wenden wir hier an, um an die anderen Lösungen der Gleichung zu kommen.

Wir dividieren unser Polynom durch (x - 1) – weil unsere geratene 1 eine 0-Stelle dieses Terms ist:

$$\begin{array}{l}
\quad x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6 \div (x-1) = x^2 - 5 \cdot x + 6 \\
-(x^3 - x^2) \\
\hline
\quad -5 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6 \\
-(-5 \cdot x^2 + 5 \cdot x) \\
\hline
\quad 6 \cdot x - 6 \\
-(6 \cdot x - 6) \\
\hline
0
\end{array}$$

Das Ergebnis der Division ist ein quadratisches Polynom, dessen Nullstellen wir z.B. durch die p/q-Formel bestimmen können. Es sind 2 und 3. Wenn wir unseren Ausgangsterm also als Produkt seiner 0-Stellen darstellen wollen, erhalten wir

$$(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$$

Was wir auf diese Art gemacht haben, ist die „Faktorisierung“ des Terms.

3.6.1 Horner-Schema

Ein schnelleres Verfahren, um eine solche Polynomdivision durch eine 0-Stelle durchzuführen ist das "**Horner-Schema**". Wir schreiben die Koeffizienten unseres Polynoms in eine Tabelle und starten dabei mit der zweiten Spalte. Die 0-Stelle - in unserem Fall die 1 – kommt in die 1. Spalte und die 2. Zeile. Die 2. Zeile/2. Spalte bekommt eine "0". Unsere Tabelle bekommt 3 Zeilen:

	1	-6	11	-6
1	0			

Nun addieren wir die Werte der 2. Spalte und schreiben das Ergebnis darunter in die 3. Zeile.. Das Ergebnis multiplizieren wir mit der Zahl in der 1. Spalte - der 1 – und schreiben das Ergebnis in der nächsten Spalte in die 2. Zeile. Das wiederholen wir, bis wir die letzte Spalte erreicht haben:

	1	-6	11	-6
1	0	1	-5	6
	1	**-5**	**6**	0

Die "0", die wir als letztes in die 3. Zeile geschrieben haben, ist das Ergebnis von

$1^3-6\cdot 1^2+11\cdot 1-6$ - da man mit diesem Verfahren - dem Hornerschema – Werte von Polynomen sehr schnell – mit einem Minimum an Multiplikationen – berechnen kann. Aber das Verfahren kann noch mehr: Die Werte links von der 0 sind die Koeffizienten des Ergebnisses der Polynomdivision:

$$x^2 - 5\cdot x + 6$$

So können wir also das Horner-Schema als schnelles Verfahren der Polynomdivision benutzen. (Es gibt aber auch Anwendungen der Polynomdivision, bei denen das Horner-Schema nicht weiterhilft. Ehe Sie sich jetzt also ärgern, warum Sie dieses andere Verfahren in der Schule gelernt haben: Je nachdem können Sie es vielleicht doch brauchen!)

3.7 Exponential- und logarithmische Gleichungen

Die Geschichte des „Josefspfennig“:

Christus war gerade geboren, da verdiente Josef einen Cent. Und er dachte, es sei eine gute Idee, diesen Cent bei der Bank von Nazareth für seinen Sohn anzulegen. Die Bank von Nazareth gab ihm für diesen Cent einen Zins von 3%. Später nahm die Geschichte seines Sohnes eine Wendung, von der wir alle gehört haben und so wurde das Geld nie mehr angerührt. Und durch Zins und Zinseszins wurde daraus ein ansehnliches Sümmchen.

Bevor Sie weiterlesen, wie viel Geld, schätzen Sie, ist aus dem Cent geworden?

....

Lassen Sie uns nun das Problem mit mathematischer Brille betrachten. Das erste, was wir tun können, um die Frage zu beantworten, ist, uns die Frage zu stellen: Wie viele Jahre dauert es bei einem Zinssatz von 3%, bis sich ein Kapital verdoppelt hat?

Wir suchen eine Lösung für die Gleichung:

$$
\begin{aligned}
1.03^x &= 2 \quad | \quad \log_{1.03}(..) \\
x &= \log_{1.03}(2) \approx 24
\end{aligned}
$$

Wie wir mit dem Taschenrechner einen Logarithmus zur Basis 1,03 berechnen können, werden wir uns später anschauen. An diesem Punkt ist nur wichtig, dass es bei einem Zinssatz von 3% 24 Jahre dauert, bis sich unser angelegter Cent verdoppelt hat. Hier sehen Sie übrigens einen wichtigen Zusammenhang zwischen Exponential- und Logarithmus-Termen. So wie wir die Quadratwurzel benutzten, um quadratische Gleichungen zu lösen, so benutzen wir nun Logarithmen, um Exponentialgleichungen zu lösen. Das allgemeine Prinzip dahinter ist die „Umkehrfunktion“. Später bei den Funktionen werden wir uns das noch einmal näher anschauen.

$$\sqrt{x^2} \quad = \quad x, \forall x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \quad (\text{im Fall } x<0 \text{ haben wir } \quad \sqrt{x^2} \quad = \quad -x), \quad \log_a(a^x) \quad = x \, \forall x \in \mathbb{R}$$

Nach 24 Jahren haben wir also 2ct, nach 48 Jahren sind es 4ct, nach 72 Jahren 8ct usw.

Die nächste Frage ist: Wie oft hat sich unser Geld bis 2017 verdoppelt?. Das bekommen wir mit einer einfachen Division heraus:

$$2017 \div 24 \quad \approx \quad 84$$

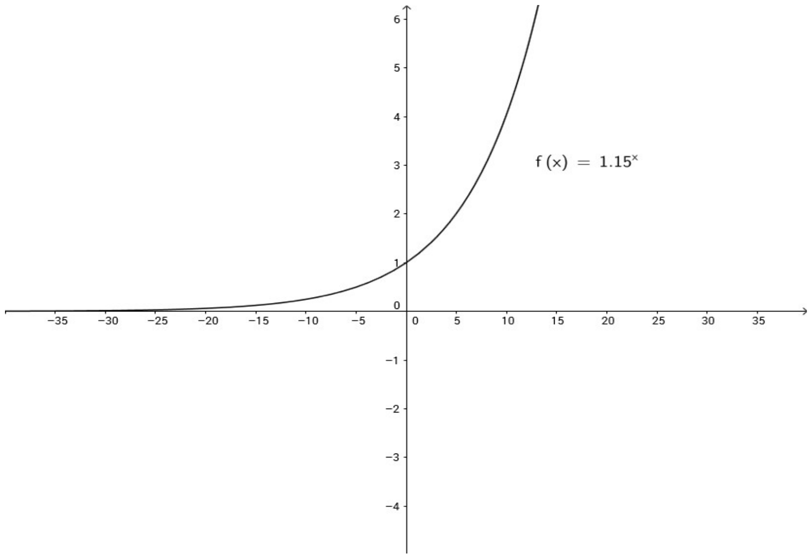
Nun, da wir wissen, wie oft sich der Cent verdoppelt hat, können wir mit Exponentialrechnung an die Lösung kommen:

$$1\text{ct} \cdot 2^{84} \quad = \quad 19342813113834066795298816\text{ct} \quad = \quad 193428131138340667952988.16\,€$$

Das ist eine **wirklich große** Zahl! Eine Zahl mit 24 Stellen. Viel mehr als Milliarden und Tausende Milliarden, mit denen wir in der letzten Finanzkrise und der Eurokrise vertraut wurden. Und viel mehr Geld, als auf dieser Welt überhaupt existiert.

Was können wir von dieser Geschichte lernen?

Zum einen: Wir bekommen durch das Lösen von Exponentialgleichungen manchmal Dinge heraus, die wir aus dem Bauch so nie vorhersagen würden. Lange Zeit passiert bei exponentiellem Wachstum nichts, was auffallen würde. Und nach dieser langen Zeit geht es plötzlich sehr schnell. Eine Skizze dieses exponentiellen Verlaufs wird daher auch schon einmal „Hockeyschlägerfunktion“ genannt, schauen Sie hier, warum:



Und zum zweiten: Da es um Zinsen, Renditen und Inflation geht, sind diese Exponential- und Logarithmus-Berechnungen gerade im ökonomischen Umfeld wichtig.

3.7.1 Wie man allgemein Exponential- und Logarithmus-Werte berechnet

In unserem kleinen Beispiel mussten wir einen Logarithmus zur Basis 1.03 and eine Exponentialfunktion zur Basis 2 berechnen. Viele Taschenrechner können aber nur mit den Basen "e" (=2.17....) oder 10 umgehen.

Wir brauchen daher 2 Regeln, um solche Berechnungen auch für andere Basen machen zu können:

$$a^x = e^{\ln(a)\cdot x} = 10^{\log_{10}(a)\cdot x}$$

$$\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\ln(x) = \frac{1}{\log_{10}(a)}\cdot\log_{10}(x)$$

Mit diesen beiden Regeln können wir die Werte für beliebige Basen berechnen: Wenn wir eine Exponentialfunktion kennen, kennen wir alle. Und wenn wir eine Logarithmusfunktion kennen, kennen wir alle.