1 Warum Mathematik?

1.1 Die Natur und die Mathematik

Das älteste je gefundene Dokument – eine Tontafel, circa 500 Jahre älter als die ältesten Keilschrift-Dokumente und damit circa 5000 Jahre alt – enthält Zahlen und Rechnungen. Es ist eine Steuerquittung. So können wir sagen, dass wirtschaftliche Fragen die „Mutter der Mathematik” waren. Die Notwendigkeit, Bücher zu führen brachte die Menschen dazu, sich intensiv mit Zahlen zu beschäftigen.

Später wurden dann immer mehr Aspekte des Lebens und der Natur in Zahlen ausgedrückt.

So wurde es z.B. möglich, Sonnenfinsternisse mittels mathematischer Methoden vorherzusagen. Und die Priester damals konnten ihre Anhängerschar auf diese Weise beeindrucken und so ihren Arbeitsplatz sichern. [2]

Wenn Sie zum Beispiel etwas über den Klimawandel und Vorhersagen über zukünftige Entwicklungen in diesem Bereich lesen, seien Sie sicher, dass als Grundlage dessein ein Forscher Differentialgleichungen aufgestellt und gelöst hat. Die Differentialgleichungen, die auf der Differential- und Integralrechnung aufbauen, sind die Sprache, mit der heute Probleme der Naturwissenschaften formuliert und behandelt werden. Und ein Aspekt der Mathematik – die Statistik- wird heute in fast jedem wissenschaftlichen Zusammenhang benötigt.

1.2 Ein bißchen Geschichte oder: Was die Mathematik mit dem Pfeffer zu tun hat

Nachdem alles mit ökonomischen Fragen begann, bestimmten auch weiter wirtschaftliche Notwendigkeiten die weitere Entwicklung der Mathematik. Die Ziffern, die wir heute nutzen - $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ - kamen ins Leben, um das Leben der Buchhalter leichter zu machen. Obwohl wir sie die „arabischen“ Ziffern nennen, wurden sie nicht im arabischen Kulturkreis, sondern in Indien erfunden. Die indischen Kaufleute verkauften ihren Pfeffer an arabische Kaufleute, die den Pfeffer als Zwischenhändler nach Europa lieferten. Zu dieser Zeit vor rund 1000 Jahren hatte Venedig ein Monopol auf den Pfefferhandel in Europa.

In diesen alten Zeiten machten die europäischen Kaufleute ihre Berechnungen mit römischen Ziffern. Wir werden in diesem Kurs nicht lernen, wie man zum Beispiel mit römischen Zahlen multipliziert (obwohl das Verfahren für angehende Informatiker sehr interessant ist), aber seien Sie sicher:

Es war viel mehr Arbeit als wir heute mit den „arabischen Ziffern“ haben!

Zu dieser Zeit konnte man in Deutschland bei einem Rechenmeister lernen, wie man Zahlen addiert. Wenn Sie lernen wollten, wie man multipliziert, war es damals eine gute Idee, sich an einer norditalienischen Universität einzuschreiben. Oder Sie fanden einen Rechenmeister in Deutschland, der es Ihnen heimlich erklärte.

Und da die Menschen immer voneinander lernen, lernten die arabischen Rechenmeister von den indischen das neue System und von diesen wiederum übernahmen es die italienischen Rechenmeister.

In der ersten Zeit war dieses Wissen allerdings strengstens geheim. Bis zum frühen 16. Jahrhundert kannte kaum ein europäischer Kaufmann diese neuen, revolutionären Ziffern. Diejenigen, die dieses Wissen besaßen, waren dafür allerdings extrem erfolgreich. So führte der Augsburger Jakob Fugger – genannt Jakob der Reiche – seine Bücher mit arabischen Ziffern und mit der gerade in Italien entwickelten doppelten Buchführung. Er soll gesagt haben „Buchführung ist die Kunst, die reich macht.“, und Sie können sicher sein: Er wusste, wovon er sprach. Er wurde – gemessen am Bruttosozialprodukt Europas – der reichste Mensch, der jemals auf diesem Planeten lebte. Denken Sie daran, wenn Sie die doppelte Buchführung lernen müssen und das fürchterlich langweilig finden.(Es macht natürlich einen Riesen-Unterschied, ob Sie sich mit anderer Leute Zahlen beschäftigen oder mit den eigenen, die den Unterschied machen, ob Sie selbst reich werden oder nicht.

Zusammen mit dem Pfeffer reisten diese neuen Ziffern, die so bedeutsam für uns wurden, nach Europa und übernahmen von hier aus die ganze Welt.[2]

1.3 Auf den Kopf kommt es an – Mathematik machen wir mit dem Gehirn

Mathematik ist lange so gelehrt und gelernt worden, als ob sie in einem „geistigen Raum“ - unabhängig von den Bedingungen, die unser Körper, speziell unser Gehirn, uns setzt, stattfände. Kein Wunder, dass dabei viele Schüler „aus dem Rennen ausstiegen“. Und ich glaube, jeder hat zumindest in seinem Bekanntenkreis jemanden, der voller Stolz sagt, dass er „überhaupt keine Mathematik kann“. Die Hinrforscher können uns heute sagen, wie es dazu kommt, was im Hirn passiert, wenn jemand zum Urteil über sich selbst kommt, für Mathematik einfach nicht geeignet zu sein. Und daher tut es recht gut, wenn man sich mit der Mathematik beschäftigt, auch ein wenig zu lesen und zu hören, was die moderne Hirnforschung dazu zu sagen hat. Daher folgen in diesem Skript nun einige Worte dazu.

1.3.1 Fehler – sind sie wirklich so übel?

Was ist das erste, dass Ihnen zu dem Wort „Fehler“ einfällt? Wenn Ihre ersten

Assoziationen negativ sind – etwa "Fehler sind schlecht" or "Vermeiden" oder „bei der Prüfung durchgefallen“, sind Sie in guter Gesellschaft mit den meisten Menschen, die eine Schule besucht haben. Die meisten Menschen denken, dass Fehler eine richtig üble Sache sind. Das mag in manchen Bereichen ja auch stimmen – ich denke da an Chirurgen oder Piloten – aber:

Wir lernen aus unseren Fehlern

ist ebenso wahr. Und gerade in Mathematik ist es so: Wenn Sie darauf geprägt sind, Fehler unbedingt zu vermeiden, dann sind Ihre Voraussetzungen dafür, neue mathematische Fähigkeiten zu entwickeln, ganz schlecht. Ich schlage Ihnen daher einen etwas anderen Umgang mit Fehlern in der Mathematik vor: Die meiste Zeit sind Fehler, die sie mathematisch machen, nämlich richtig super: Sie sind, so glaube ich, sogar die einzige Möglichkeit, die Sie haben, um richtig gut in Mathematik zu werden. Manchmal sind die Fehler aber auch nicht so toll. An der Universität ist es so:

- 6 Monate lang sind Fehler eine wunderbare Sache, weil Sie daraus lernen
- 2 Stunden lang sind sie übel – in Ihrer Prüfung

Die Schule hat in unseren Gehirnen diese vertrackte Verbindung von „Fehler“ und „schlecht“ geschaffen. So sind wir darauf, geprägt, Fehler vermeiden zu wollen und tun lieber nichts. Erinnern Sie sich, als der Lehrer aufgefordert hat, es solle jemand etwas vorrechnen und Sie auf den Boden geschaut haben, um bloß nicht „dranzukommen“? Dabei wäre das doch der ideale Moment gewesen, es zu lernen! Irgendwann geht der Mitschüler, der es perfekt kann, an die Tafel und rechnet vor. Merken Sie es? Der hat in dem Moment gar nichts dazugelernt, er konnte es ja schon!

Daher empfehle ich Ihnen:

- **Machen Sie in den nächsten Monaten möglichst viele Fehler!**
- **Holen Sie sich soviel Feedback zu Ihrem mathematischen Tun wie irgend möglich**

Mathematik lernen ist wie Laufen oder Fahrradfahren lernen. Sie können es nicht allein dadurch lernen, dass Sie denen zuhören, die es schon können.

1.3.2 Bedeutung – Voraussetzung zum Lernen

Haben Sie je etwas gelernt und es sofort wieder vergessen? Oft sind wir wütend auf uns selbst, wenn das passiert, aber das ist eine ganz wichtige Funktion unseres Gehirns. **Das Gehirn merkt sich Dinge dann nicht, wenn sie bedeutungslos sind.** Zum Beispiel wissen Sie vermutlich nicht mehr, welche Werbung auf dem letzten Bus stand, den Sie gesehen haben.

Woran merkt nun das Gehirn, was Bedeutung hat? Es sind die Emotionen. Es ist kein Problem, sich Dinge zu merken, die mit Emotionen verknüpft sind. Aber es ist sehr schwierig, sich Dinge zu merken, die das nicht sind. Das gilt auch für die Mathematik: Wenn Sie sich die mathematischen Inhalte merken wollen, dann machen Sie sich klar, welche Bedeutung sie für Sie haben. Welche Möglichkeiten gibt es da, wenn es um Mathematik geht?

- Ein erstrebenswertes Ziel (vielleicht Ihr Bachelor-Abschluss?)
- die Verbindung zu einem Ihnen wichtigen Menschen (Kinder lernen viel von ihren Eltern....)
- die Liebe zum Thema (vielleicht macht Ihnen Mathematik ja auch Spaß!)
- .... vielleicht fällt Ihnen Ihre persönliche Bedeutung, die die Mathematik für Sie hat, ein: Schreiben Sie sie auf!

Wenn Sie an dem Thema interessiert sind, empfehle ich Ihnen die Vorträge und Bücher von Gerald Hüther auf youtube zu dem Thema.

1.3.3 Was, wenn wir Ideen brauchen?

Lassen Sie uns ein kleines Gehirn-Experiment machen: Wenn ich Sie auffordere „Bitte stellen Sie sich keine weiße Maus vor. Sie darf auch keinesfalls auf einem roten Fahrrad sitzen und sie sollte schon gar keine blaue Trompete spielen!“ Was passiert da in Ihrem Gehirn?

Meine Aufforderung war, all dies aus Ihrem Gehirn herauszuhalten. Und genau in diesem Moment kamen all diese Inhalte in Ihr Gehirn. Warum?

Die Antwort liegt in der Struktur des Gehirns. Da gibt es eine Region des Gehirns, die die Sätze analysiert – sie behandelt dabei solche Worte wie „kein, nicht...“ und die anderen logischen Terme. Aber in dieser Region gibt es kein Vorstellungsvermögen, egal, ob der Satz ein „kein“ enthält oder nicht. Und dann gibt es eine andere Region, in der die Vorstellungen entstehen. Und diese Region hat nichts zu tun mit all den logischen Begriffen. So kann unser Gehirn die Aufgabe, sich „etwas nicht vorzustellen“ gar nicht erfüllen.

Was hat dieser „Weiße-Maus-Effekt“ nun mit Mathematik zu tun?

In der Schule waren die meisten gestellten Aufgaben so, dass Sie sie lösen konnten, ohne Ihr Vorstellungsvermögen überhaupt einzusetzen. Wenn ich Sie beispielsweise auffordere „Addieren Sie 7 zu 6 mal 4“, dann kommen Sie auf die 31, ohne Ihr Vorstellungsvermögen belästigen zu müssen. Aber wenn ich Sie bitte „Addieren Sie 6 zu einem Vielfachen von 4“, dann geht das nicht mehr so einfach. Bei der zweiten Aufgabe haben Sie eine Freihait der Wahl. Und diese Freiheit der Wahl hat ihren Preis: Mehr Regionen Ihres Gehirns sind dabei involviert. Die eine Region fragt die andere „Sag mir bitte irgendeine Zahl!, damit sie die Zahl dann mit 4 multiplizieren kann. Was ist, wenn diese Region gerade, damit das Gehirn Energie spart, im Tiefschlaf ist, weil wir in einer Mathestunde sind und gerade diese Region die ganzen letzten Jahre in Mathestunden nie gebraucht wurde?

Das ist ein wichtiger Unterschied zwischen Schul- und Universitäts-Mathematik. Wir brauchen an der Universität im Schnitt mehr Hirnregionen, um Aufgaben zu bewältigen, als das in der Schule der Fall war.

Noch schlimmer: Wir haben in der Schule gelernt, uns zu konzentrieren. Wer das gut konnte, konnte Mathe-Aufgaben gut lösen. Aber was ist Konzentration überhaupt? Wenn wir uns konzentrieren, sagt die eine Hirnregion den anderen „Sei still und störe mich nicht!“ Manchmal ist das eine ganz wichtige Sache, um ein Problem lösen zu können. Was aber, wenn die Aufgabe, die gerade ansteht, gar nicht alleine in der Region gelöst werden kann, die die anderen „abschaltet“? Sich stärker zu konzentrieren, ein Lösungsansatz, den viele Studenten in den ersten Semestern oft wählen, führt jedenfalls offensichtlich nicht weiter.

Deshalb empfehle ich Ihnen: Wenn Sie bemerken, dass Sie für eine Aufgabe keine Lösung finden, obwohl Sie sich konzentrieren, tun Sie lieber das Gegenteil: Entkonzentrieren Sie sich!

- Hören Sie auf, das Problem mit „mehr Konzentration“ lernen zu wollen
- Geben Sie Ihrem Gehirn so viele Sinneseindrücke wie möglich (Verlassen Sie zum Beispiel Ihre Wohnung und sehen Sie die Welt aus einer neuen Perspektive!)
- Vertrauen Sie Ihrem Gehirn, dass es auch an dem Problem arbeiten wird, während Sie sich nicht konzentrieren. Viele bedeutende Probleme sind schon auf Spaziergängen gelöst worden.

1.3.4 Wiederholung

Wie oft müssen Sie etwas wiederholen, bis Sie es wirklich gut können? Es gibt keine für alle Menschen gültige Antwort auf diese Frage, aber 30 Wiederholungen für Mathematik-Aufgaben sind ein guter Anhaltspunkt.

Wenn ich Sie beispielsweise nach den Monaten frage, werden Sie antworten "Januar, Februar, März, April, ..." und so weiter. Sie werden auf diese Weise die Monate sehr schnell aufsagen können. Ganz anders ist es, wenn Sie dieselben Monate in alphabetischer Reihenfolge aufsagen sollen.

"April, August,..." Welches ist der nächste? Probieren Sie es, Sie werden viel, viel langsamer sein als bei der zeitlichen Reihenfolge. Wenn Sie die Sache aber morgen wiederholen, dann werden Sie schon etwas schneller sein. Und beim dritten Mal dann noch etwas schneller.

Daher meine nächste Empfehlung: **Wiederholen Sie Ihre Aufgaben!**. Was Sie im Oktober gelernt haben, wiederholen Sie im November, Dezember usw. Das müssen keine langen Sitzungen sein, es geht nur darum, Ihre Synapsen etwas „aufzufrischen“. Die werden dabei nämlich etwas dicker, lassen mehr Strom durch und beim nächsten Mal klappt es dadurch besser. Wenn Sie wiederholen – oft reichen 15 Minuten - werden Sie gut auf Ihre Prüfungen vorbereitet sein. Wenn Sie aber im November etwas lernen und das nächste Mal einen Tag vor der Prüfung draufschauen, dann kann es sein, dass das etwas spät ist.

Ein Punkt ist da noch wichtig. Es ist für Sie vielleicht gut, etwas im Laufe des Semesters 30 mal zu wiederholen, damit Sie es gut können. Es ist aber nicht möglich, dass Sie von Ihrem Professor zu jedem Aufgabentyp 30 Aufgaben bekommen. **Stellen Sie sich daher Ihre eigenen Aufgaben!** Seien Sie Ihr eigener Lehrer! Oft finden Sie auch die Aufgaben, die Ihr Gehirn braucht, mit der Suchmaschine im Internet.

In dem Zusammenhang empfehle ich Ihnen die Vorträge von **Vera F Birkenbihl** auf youtube. Unser Ausflug in die Hirnforschung ist an dieser Stelle zu Ende. Jetzt geht es los mit der Mathematik!

2 Die verschiedenen Zahlenmengen

2.1 Von den natürlichen zu den reellen Zahlen

Zahlen sind erst einmal zum Zählen da. Und das tun Menschen schon sehr, sehr lange. Die Zahlen, die wir dafür benutzen, sind $1,2,3,4,....$. Die Mathematiker haben sich angewöhnt, sie die **natürlichen Zahlen** zu nennen, und natürlich ein Symbol dafür eingeführt. Ein N mit einem zusätzlichen Strich:

$$\mathbb{N}=\{\ 1,2,3,...\ \}$$

Mit dem arabischen Ziffernsystem ist die "0" wichtig geworden, und so schreiben wir

$$\mathbb{N}_0\ =\ \{\ 0\ \}\ \cup\ \mathbb{N}\ =\ \{\ 0,1,2,3,...\ \}\ .$$

Der Bogen zwischen den beiden Mengen steht dabei für die „Vereinigung“ von zwei Mengen, bei der wir die Elemente erhalten, die entweder in der einen oder der anderen Menge sind.

Als nächstes ergänzen wir diese Menge mit den **negativen Zahlen** und bekommen so die **ganzen Zahlen**:

$$\mathbb{Z}=\mathbb{N}\ \cup\ \{\ -n\ \mid\ n\in\mathbb{N}\ \}\ =\ \{\ ...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\ \}$$

Diese negativen Zahlen sind einmal erfunden worden, weil man mit Ihnen Schulden zählen kann. Das ist übrigens noch gar nicht so lange her. Jakob Fugger kam im 16. Jahrhundert bei seiner Unternehmensbilanz noch ohne sie aus.

Die nächstgrößere Menge bekommen wir, wenn wir ganze Zahlen dividieren. Das tun wir natürlich nicht mit der 0 im Nenner und so bekommen wir die **rationalen Zahlen**:

$$\mathbb{Q}\ =\ \{\ \frac{z}{n}\ \mid\ z\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}\ \}$$

Seit wir unsere Zahlen im arabischen Ziffernsystem schreiben, gibt es dieselben Zahlen auch als **Dezimalbrüche**. Sie alle kennen sicher

$$\frac{1}{4}\ =\ 0.25\ \text{und}\ \frac{1}{3}\ =\ 0.\overline{3}$$

Ihr Taschenrechner zeigt diese Dezimalbrücke an, und es ist einfach, Dezimalbrüche der Größe nach zu ordnen.

Während es nicht so offensichtlich ist, dass $\frac{4}{7} > \frac{1}{2}$, können Sie einfach erkennen, dass $0.\overline{571428} > 0.5$ ist.

Wenn Sie also Zahlen vergleichen – oder der Größe nach ordnen – ikönnen Sie dies tun, indem Sie sie in Dezimalbrüche umwandeln. Und weil die Brüche von ganzen Zahlen immer **periodisch** sind (das bedeutet, dass sich Zahlenfolgen bei den Nachkommastellen irgendwann einmal wiederholen), können wir die rationalen Zahlen auch so schreiben:

$$\mathbb{Q} = \{ \ x \ | \ \text{x ist ein - endlicher oder periodisch unendlicher - Dezimalbruch} \ \}$$

Schon in der Antike merkten die Menschen aber, dass das noch nicht alle möglichen Zahlen sind. Nich alle Zahlen sind Brüche von ganzen Zahlen. Es ist nämlich unmöglich, $\sqrt{2}$ als so einen Quotienten zu schreiben. Aber es ist eine sinnvolle Länge: Wenn bei einem rechtwinkligen Dreieck die beiden Katheten die Länge 1 haben, dass ist es die Länge der Hypothenuse. Sie erinnern sich an den Satz des Pythagoras.

Es ist gar nicht so einfach, die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ zu definieren. Wir übernehmen daher an dieser Stelle die Definition, die Sie vielleicht aus der Schule kennen:

$$\mathbb{R} = \{ \ x \ | \ \text{x ist - endlicher oder unendlicher - Dezimalbruch} \ \}$$

Die bekanntesten Beispiele für reelle Zahlen, die nicht rational sind, sind:

$\sqrt{2}, e \text{ und } \pi$.

2.2 Einige Varianten, um Teilmengen auszudrücken

Wenn wir in einer Menge links die Obermenge angeben, dann einen senkrechten Strich schreiben und rechts davon eine oder mehrere Eigenschaften angeben, die die Zahlen zusätzlich besitzen sollen, dann bekommen wir Teilmengen. Ein Beispiel dafür ist:

$$\{ \ x \in \mathbb{R} \ | \ x > 60 \ \}$$

Das ist aber oft umständlich. Statt Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $\{ \ x \in \mathbb{R} \ | \ ... \ \}$ auszudrücken, verwenden wir kürzere Terme. Ein Beispiel:

$$\{ \ x \in \mathbb{R} \ | \ x > 0 \ \} = \mathbb{R}^{\geqslant 0}$$

Eine andere Schreibweise ist die von der Schule her bekannte Intervallschreibweise. Hier einige Beispiele zur Erinnerung:

$$
\begin{array}{ll}
[0,5] = \{ \ x \in \mathbb{R} \ | \ 0 \leqslant x \leqslant 5 \ \} & (\textit{ein abgeschlossenes Intervall}) \\
[0,5) = \{ \ x \in \mathbb{R} \ | \ 0 \leqslant x < 5 \ \} & \\
(0,5] = \{ \ x \in \mathbb{R} \ | \ 0 < x \leqslant 5 \ \} & \\
(0,5) = \{ \ x \in \mathbb{R} \ | \ 0 < x < 5 \ \} & (\textit{ein offenes Intervall}) \\
[0,\infty) = \{ \ x \in \mathbb{R} \ | \ 0 \leqslant x \ \} & \\
(-\infty,5] = \{ \ x \in \mathbb{R} \ | \ x \leqslant 5 \ \} &
\end{array}
$$

Das Symbol ∞ steht dabei für „unendlich“, es sagt also aus, dass das Intervall $[0,\infty)$ überhaupt keine obere Grenze besitzt.

2.3 Größenordnung – von ganz kleinen und ganz großen Zahlen

Manchmal geht es um richtig große Zahlen. "Die öffentliche Verschuldung der USA war am 15. Dezember 18.900 Milliarden Dollar". Was bedeutet das?

In der Mathematik benutzen wir Exponenten der Zahl 10, um große Zahlen auszudrücken. Zum Beispiel sagen wir "**Tausend**" und meinen eine "1" mit drei "0"en. Wir sagen "**Million**" und meinen eine "1" mit sechs "0"en. In Exponentialschreibweise sehen diese Zahlen so aus: 10^3 und 10^6 .

Was es kompliziert macht, ist, dass die Begriffe im deutschen und englischen Sprachraum unterschiedlich gehandhabt werden, wenn es um die größeren Zahlen geht. Schauen wir uns dazu die folgende Tabelle an:

Zahl	**Exponentialschreibweise**	**englisch**	**deutsch**
1000	10^3	thousand	tausend
1000000	10^6	million	million
1000000000	10^9	billion	milliarde
1000000000000	10^{12}	trillion	billion
1000000000000000	10^{15}	quadrillion	billiarde
...	...	...	...

Wenn also in einer amerikanischen Zeitung "The american public debt has reached 19 trillion dollar" steht, wäre die richtige Übersetzung "19 Billionen Dollar". Wenn wir im Englischen von "300 billions of Euro" dann wäre die korrekte Übersetzung "300 Milliarden Euro". Da vertun sich die Wirtschaftsjournalisten sehr oft und daher sollten wir diese Falle kennen und umgehen.

2.4 Rechengesetze

Sehr schnell haben die Menschen, die vor 5000 Jahren begannen, sich intensiver mit Zahlen zu beschäftigen, gemerkt, dass es da Dinge gibt, die immer gleich ablaufen, Gesetzmäßigkeiten. So ist es bei der Addition gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die Zahlen addiert, 5+7 und 7+5 führt zum gleichen Ergebnis. In der mathematischen Formelsprache ausgedrückt gilt für alle reellen Zahlen:

$$x+y=y+x$$

Wir sagen dazu heute „Kommutativgesetz der Addition.

Wenn wir 3 Zahlen addieren, dann ist es auch gleichgültig, ob wir die dritte Zahl zur Summe der ersten beiden addieren oder ob wir die erste Zahl zur Summe der letzten beiden Zahlen addieren. Derselbe Sachverhalt als Formel:

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

Diese Tatsache nennen wir „Assoziativgesetz der Addition. Die Multiplikation wurde einem erfunden, weil man immer wiederkehrend die gleiche Addition machen musste. Da ist es einfacher, statt $5+5+5+5+5+5$ zu schreiben $5\cdot 6$ und sich das Ergebnis einfach zu merken. Noch heute lernt man in der Schule das „kleine und große 1 mal 1“. Und auch für diese Operation gelten die gleichen Gesetze, die schon für die Addition galten, es gilt also

$x\cdot y=y\cdot x$ und $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$, und damit haben wir das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz der Multiplikation.

Es gibt aber auch noch ein Gesetz, dass die Addition und die Multiplikation miteinander verbindet. Als Formel aufgeschrieben lautet es

$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ oder, gleichwertig, $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$

und man nennt es heute das Distributivgesetz.

Hier haben wir die ältesten und einfachsten Rechengesetze, die seit Jahrtausenden viel Arbeit sparen, indem man die jeweils aufwändigere Rechnung durch die einfachere ersetzen kann. Dabei ist wichtig, dass das Gleichheitszeichen immer symmetrisch ist, dass es also keine Rolle spielt, was jeweils links und rechts davon steht. Das haben Sie beim Distributivgesetz sicherlich gelernt. Die Strategie,

$5\cdot 7+2\cdot 7$ durch $(5+2)\cdot 7$ zu ersetzen, heißt dabei „Ausklammern“, wenn Sie umgekehrt statt $(5+2)\cdot 7$ $5\cdot 7+2\cdot 7$ schreiben, dann „multiplizieren Sie aus.

Bei der Addition und Multiplikation finden wir die ersten „Rechengesetze“ (die streng genommen keine Gesetze sind, sondern eine Theorie dieser Operationen), und Sie wissen es sicherlich bereits: Dieses Konzept wird uns begleiten, solange wir uns mit Mathematik beschäftigen. Es wird Logarithmusgesetze geben, Sinus-Gesetze und diverse

Regeln der Differential- und Integralrechnung. Für Sie ist jeweils wichtig, Sicherheit darüber zu besitzen, welche der Regeln im jeweiligen Zusammenhang gültig und andwendbar sind. So gilt bei Matrizen z.B. ein Assoziativ-Gesetz und ein Distributiv-Gesetz wie bei den Zahlen. Auch das Kommutativgesetz der Addition gilt dort. Das Kommutativgesetz der Multiplikation gilt aber dort nicht! Unsicherheit bei den Regeln führt zu vielen Fehlern, weil man mit der jeweiligen Aufgabe ohne die Anwendung der jeweiligen Regeln einfach nicht weiterkommt. Die ersten dieser Gesetze werden wir im nächsten Abschnitt kennenlernen, und werden sehen, dass es dabei recht schnell kompliziert wird.

2.5 Potenzgesetze

So wie die Multipllikation entstanden ist, um wiederholte Additionen schneller zu machen, so kann natürlich auch das Problem auftreten, dass Multiplikationen wiederholt durchzuführen sind. Die „Abkürzungen“, die es dafür gibt, sind die Potenzgesetze. Wenn wir zum Beispiel eine Zahl x 7 mal miteinander Multiplizieren, können wir dies tun, indem wir sie erst 5 mal mit sich selbst multiplizieren und dann noch 2 mal. Als Formel:

$$x^7 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5 \cdot x^2$$

Dabei sind die Zahlen 7, 5 und 2 natürlich noch willkürlich, wenn wir sie durch Platzhalter ersetzen, bekommen wir:

$$x^{(a+b)} = x^a \cdot x^b$$

Genauso können wir aus $\frac{x^7}{x^5} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = x^2$ erkennen, dass das Gesetz

$x^{(a-b)} = \frac{x^a}{x^b}$ gilt.

Daraus können wir wiederum sehen, dass $x^0 = 1$ gelten muss (allerdings nicht, wenn x selber 0 ist, da es dann ja im Nenner der obigen Formel stünde) und aus den bisherigen Formeln bekommen wir

$x^{-a} = x^{(0-a)} = \frac{1}{x^a}$. Damit haben wir schon eine kleine Theorie der Potenzrechnung. Wir können die aber noch um Brüche erweitern. Wenn x > 0 ist, gilt nämlich

$x^{(\frac{1}{2})} \cdot x^{(\frac{1}{2})} = x^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = x$, und daher muss $x^{(\frac{1}{2})} = \sqrt{x}$ gelten, da die Wurzel einer Zahl x, mit sich selbst multipliziert, ja ebenfalls x ist. Und das gilt nicht nur für den Exponenten $\frac{1}{2}$, sondern für jeden Kehrwert, es gilt also:

$$x^{(\frac{1}{a})} = \sqrt[a]{x} \quad .$$

Ein weiteres Gesetz bekommen wir wenn wir uns einen Exponenten anschauen bei zwei Basen. Schauen wir einmal, was da beim Exponenten 2 passiert:

$$x^2 \cdot y^2 = x \cdot x \cdot y \cdot y = x \cdot y \cdot x \cdot y = (x \cdot y)^2$$

Schließlich gelten ja das Kommutativgesetz und Assoziativgesetz der Multipllikation und nichts anderes haben wir hier angewandt.

Und was der Zahl 2 recht ist, geht natürlich auch für die anderen und so erhalten wir noch eine weitere Regel:

$$x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$$

Ähnlich kann man sich an einem Beispiel noch die Regel

$$(x^a)^b = x^{(a \cdot b)}$$

herleiten. (Versuchen Sie es einmal mit 2 und 3 für a und b!)

Und damit haben wir hier nicht weniger als 7 Regeln der Potenzrechnung und Sie merken, dass Thema bleibt nicht ganz so einfach, wie es mit der Addition und Multipllikation begonnen hat. Sie können sich diese 7 Regeln auswendig merken und jeweils richtig anwenden? Prima! Wenn aber nicht, ist es ganz hilfreich, wenn Sie sich diese Regeln aus den einfachen Regeln am Beispiel schnell herleiten können, wie wir es hier getan haben. Dann reichen die Rechengesetze der Multiplikation und das Wissen „Potenzieren ist wiederholtes Multiplizieren“ aus und Sie müssen sich weniger merken. Welchen Weg Sie an dieser Stelle gehen, ist individuell, da gibt es keinen Weg, der für alle der Beste ist. Probieren Sie es also aus!